МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА

ЛЕКЦИИ И ЗАДАЧИ

VI

СБОРНИК ПОДГОТОВИЛИ:
Е. Дынкин, Н. Крылов, С. Молчанов, А. Сосновский, С. Шварцбурд

ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА · 1965

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

МОСКОВСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

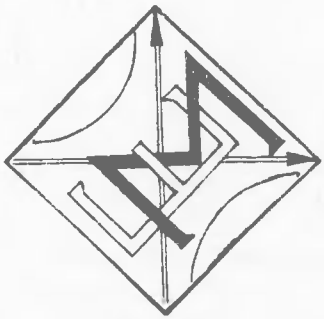
М А Т Е М А Т И Ч Е С К А Я Ш К О Л А

ЛЕКЦИИ И ЗАДАЧИ

VI

Сборник подготовили:

Е.Дынкин, Н.Крылов, С.Молчанов, А.Сосинский, С.Шварцбурд



ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1965

ОГЛАВЛЕНИЕ

стр.

В вечерней математической школе.....

Конкурс вечерней математической школы..... 3–7

С.ОВЧИННИКОВ, Решения конкурсных задач для 9–II классов 8–11

С.ГУСЕЙН-ЗАДЕ, Задача наилучшего выбора..... 12–14

Лекционный курс математического анализа в 9-х классах физико-математической школы-интерната № I8
А.СОСИНСКИЙ, Дифференцирование.....15–30

Лекционный курс математики в I0-х классах школы № 2
А.ВЕНТЦЕЛЬ, Уравнения движения и законы Кеплера..... 31–43
М.ПОСТНИКОВ, Линейные операторы; кривые, поверхности и гиперповерхности второго порядка..... 44–51

Ю.МАНИН, Контрольные задачи по теме "Комплексные числа" (для 9-х классов школы № 2).....52–55

Л.ГОЛОВИНА, Семинарские занятия по математике в 7-х классах школы № 2..... 56–58

О приеме на механико-математический факультет МГУ в I965 году..... 59–62
(Беседа с председателем экзаменационной комиссии профессором П.Л.Ульяновым).

Математическая школа № 444..... 63–68

Подписано к печати 16/XII-1965г. Л-49762
Форм. 60x90 1/16. Физ.печ. л. 4,25. Уч.-изд.л.3,30
Заказ 1553. Тираж 2000 экз. Цена 10 коп.

Издательство
Московского университета
Москва, Ленинские горы
Административный корпус
Типография Изд-ва МГУ.
Москва, Ленинские горы

В ВЕЧЕРНЕЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ШКОЛЕ

В декабре 1965 года в Вечерней математической школе прочитаны следующие циклы лекций:

Для 8-х классов:

доцент Р.З.Хасьминский, Уравнения в конечных разностях .

Для 9-11 классов:

доцент Ю.А.Шрейдер, Некоторые вопросы кибернетики;

профессор А.И.Маркушевич, Площади и объемы.

Лекции читаются с 16 до 18 час. в ауд. 02 главного здания МГУ на Ленинских горах, для 8-х классов по вторникам, для 9-11 классов по пятницам.

Групповые занятия для 7-х классов происходят по субботам с 16 до 19 час в помещении школы № 2 (Ленинский просп. д.58а). Групповые занятия для 8-х классов по вторникам с 18 до 20 час в зданиях МГУ на Ленинских горах.

Вход на все занятия свободный.

КОНКУРС ВЕЧЕРНЕЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ШКОЛЫ

В конкурсе могут участвовать все ученики 7-11 классов. Решения задач подавать руководителям групп ВМШ или присы -

лать по адресу: Москва В-234, МГУ, мех-мат., комн.12-22, ВМШ, И.Гирсанову (7-8 классы), С.Овчинникову (9-11 классы).

Приводим новые задачи .

7 КЛАССЫ

36. Доказать, что замкнутую ломаную длины I можно заключить в круг радиуса I/4.

37. Доказать, что $11^{10}-1$ делится на 100.

38. Плитка шоколада состоит из 5x8 квадратных долек. Плитка разламывается по прямым, разделяющим дольки, до тех пор, пока не получится 40 отдельных долек. Сколько раз придется ломать плитку ? (Найти все решения).

39. Дан угол и точка внутри него. Провести через эту точку прямую так, чтобы отрезок прямой, заключенный внутри угла, делился этой точкой пополам.

40. Найти все составные числа n , обладающие следующим свойством: произведение всех натуральных чисел, меньших n, не делится на n .

41. Расположить на плоскости семь точек так, чтобы любые три из них определяли угол, кратный 30^0. Найти возможно больше таких расположений.

42. В стране Лемниската объявлен конкурс на типовой проект квартиры, предназначенной для заселения одной, двумя, тремя или четырьмя семьями. Требуется, чтобы число комнат в квартире было наименьшим и чтобы во всех случаях жилплощадь можно было поделить поровну между вселяемыми семьями. Представьте ваши предложения относительно числа и размера комнат.

43. Имеется три сосуда вместимостью в 8 литров, 5 литров и 3 литра. Восьмилитровый сосуд наполнен водой. Разлить ее на две части по четыре литра.

44. Разрезать произвольный треугольник на три части, из которых можно составить прямоугольник.

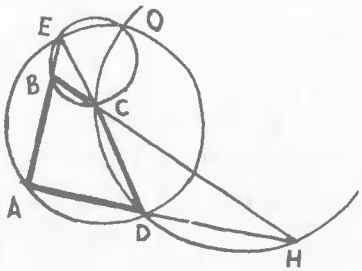
8 КЛАССЫ

36. Доказать, что замкнутую ломаную длины I можно заключить в круг радиуса I/4.

37. Пять точек A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 – расположены на плоскости так, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Пусть α – наименьший из 60 углов $\angle A_i A_j A_k$. Как надо расположить точки, чтобы α имело наибольшее возможное значение.

38. Домино состоит из двух квадратов. Назовем "тримино" фигуру , составленную из трех квадратиков. Шахматная доска из 8x8 полей покрыта двадцатью одним "тримино", так, что каждое "тримино" покрывает три поля. Одно поле остается свободным. Какое это может быть поле ?

39. Противоположные стороны выпуклого четырехугольника АВСД продолжаются до пересечения в точках Е и Н. Доказать, что окружности, описанные вокруг треугольников АВН, АЕД, ВЕС и СДН пересекаются в одной точке.



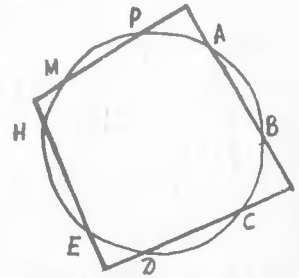
40. Для каждого целого числа n можно построить квадратный трехчлен с целыми коэффициентами, значения которого при любом целом X не делятся на n.

41. Имеется бесконечное число карточек. На каждой из них написано натуральное число, причем для каждого n имеется ровно n карточек, на которых написаны числа, являющиеся делителями числа n. Доказать, что число 1024 написано хотя бы на одной карточке.

42. Университет Бубна проектирует несколько коттеджей для размещения иностранных делегаций. Требуется, чтобы число

коттеджей было минимальным и чтобы в них можно было поселить любое число делегаций от четырех до восьми, заселяя все коттеджи и предоставляя каждой делегации коттеджи с одинаковой общей площадью. Представьте ваши предложения относительно числа и размера коттеджей.

43. Окружность пересекает четырехугольник так, что все четыре хорды АВ, СД, ЕН, МР равны. Доказать, что в этот четырехугольник можно вписать окружность.



44. Предположим, что длина спички равна единице. Составить из двенадцати спичек многоугольник, ограничивающий площадь, равную четырем квадратным единицам.

9- II КЛАССЫ

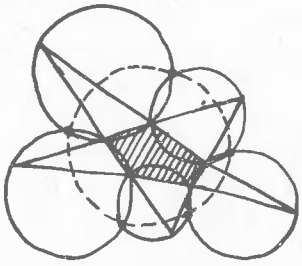
36. См. задачу 39 для 8-х классов.

37. Последовательность натуральных чисел a_n определяется следующим образом: $a_0=0$; a_n - наименьшее из натуральных чисел, таких, что среди чисел a_0, a_1, $a_2,\dots,a_n$ нет двух равных и нет трех, образующих арифметическую прогрессию. Какое значение имеет a_{2^k} ?

38. Шесть точек $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ расположены на плоскости так, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Пусть α - наибольший из 120-ти углов $\angle A_i A_j A_k$. Как надо расположить точки, чтобы α имело наименьшее возможное значение.

39. Имеется бесконечное число карточек. На каждой из них написано натуральное число, причем для каждого n имеется ровно n карточек, на которых написаны числа, являющиеся делителями числа n. Доказать, что каждое натуральное число K написано хотя бы на одной карточке.

40. Дан выпуклый пятиугольник АВСДЕ. Продолжая его стороны, строим пятиугольную звезду. Вокруг пяти полученных треугольников описываем окружности. Доказать, что попарные пересечения (отличные от вершин пятиугольника) принадлежат одной окружности.

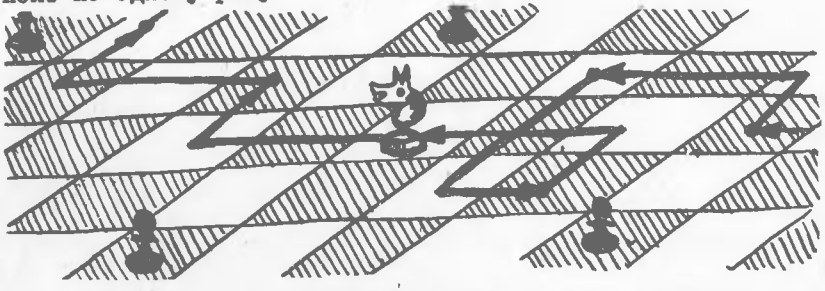


41. Доказать, что при любом натуральном n

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}}\geqslant\sqrt{n}.$$

42. Пусть $\sin x=\frac{3}{5}$. Доказать, что $\sin 25x=\frac{n}{5^{25}}$, где n – целое число, не делящееся на 5.

43. На бесконечной шахматной доске расставлены пешки через три поля на четвертом (см.рис.). Доказать, что конь не может обойти все свободные поля, побывав на каждом поле по одному разу.



44. Отметим на числовой прямой красным цветом все точки, отвечающие числам вида 81x + 100y, где x и y – натуральные числа . Отметим синим карандашом остальные целые точки . Найти на прямой такую точку, что любые симметричные относительно нее целые точки закрашены в разные цвета.

РЕШЕНИЯ КОНКУРСНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ 9–II КЛАССОВ

С. ОВЧИННИКОВ

В этом номере мы начинаем публиковать решения конкурсных задач. Приведенные ниже решения написаны с использованием работ школьников, представленных на конкурс. Формулировки задач I–3 были напечатаны в сборнике № I, а задач 6–8 – в сборнике № 2.

Задача № I.

Занумеруем нашу таблицу следующим образом:

a_{11}	...	a_{1i}	...	a_{1n}
⋮	...	⋮	...	⋮
a_{k1}	...	a_{ki}	...	a_{kn}
⋮	...	⋮	...	⋮
a_{n1}	...	a_{ni}	...	a_{nn}

Обозначим через S_k – сумму элементов k – ой строки

$$S_k = a_{k1} + a_{k2} + \ldots + a_{kn}$$

Тогда, по условию задачи, имеем n равенств

$$S_k + (a_{1i} + \ldots a_{ni}) - a_{ki} = 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Отсюда

$$(*)\begin{cases} (a_{11}+\ldots+a_{n1}) - a_{11} = (a_{12}+\ldots+a_{n2}) - a_{12} = \ldots = (a_{1n}+\ldots+a_{nn}) - a_{1n} \\ (a_{11}+\ldots+a_{n1}) - a_{21} = (a_{12}+\ldots+a_{n2}) - a_{22} = \ldots = (a_{1n}+\ldots+a_{nn}) - a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (a_{11}+\ldots+a_{n1}) - a_{n1} = (a_{12}+\ldots+a_{n2}) - a_{n2} = \ldots = (a_{1n}+\ldots+a_{nn}) - a_{ni} \end{cases}$$

Сложив по столбцам эти равенства, получим

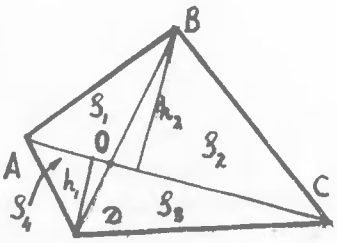
$$(n-1)P_1 = (n-1)P_2 = \ldots = (n-1)P_n,$$

где P_k – сумма всех элементов k – го столбца. Таким образом, суммы элементов в каждом столбце равны

$$P_1 = P_2 = \ldots = P_n .$$

Сравнивая полученные равенства с $(*)$, видим, что все элементы каждой строки равны между собой. Так же можно показать, что все элементы каждого столбца равны между собой. Отсюда следует, что все элементы таблицы равны нулю.

ЗАДАЧА № 2.



Пусть S_1, S_2, S_3, S_4 – целые числа, выражающие площади соответотвующих треугольников. Из рисунка имеем

$$S_1 = \frac{1}{2} AO \cdot h_2 \qquad S_3 = \frac{1}{2} OC \cdot h_1$$

$$S_2 = \frac{1}{2} OC \cdot h_2 \qquad S_4 = \frac{1}{2} AO \cdot h_1 .$$

Таким образом

$$S_1 \cdot S_3 = \frac{1}{2} AO \cdot h_2 \cdot \frac{1}{2} OC \cdot h_1 = S_2 \cdot S_4 .$$

Поэтому

$$S_1 S_2 \cdot S_3 \cdot S_4 = (S_1 S_3)^2 ,$$

но квадрат никакого целого числа не может оканчиваться цифрами ...65.

ЗАДАЧА № 3.

а) Так как общая площадь, занятая n монетами, меньше площади стола, то

$$n\pi r^2 < \pi R^2 \quad \text{или} \quad \sqrt{n} < \frac{R}{r} .$$

б) Для доказательства второго неравенства "раздуем" каждую монету в 2 раза. Тогда " раздутые " монеты наверняка покрывают полностью круг радиуса $R - r$ с центром в центре стола. Действительно, если бы в этом круге была бы точка, не покрытая "раздутыми" монетами, то расстояние от

нее до любой монеты было бы больше $2r-r=r$, и мы могли бы положить обычную монету с центром в этой точке так, чтобы она не пересекалась с остальными, что противоречит условию задачи. Поэтому сумма площадей"раздутых" монет больше площади круга радиуса $R-r$,т.е.

$$n\,4\pi r^2 > \pi(R-r)^2$$

или

$$\sqrt{n} > \frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}-1\right).$$

ЗАДАЧА № 6

Докажем, что наибольшее число карточек равно $k+1$. Предположим, что можно выбрать $k+2$ карточек, где $r>1$. Пусть n - наибольшее число, написанное на этих карточках. Рассмотрим $k+2-1$ разность между n и остальными числами на выбранных карточках. Эти разности должны быть написаны на оставшихся $2k+1-(k+2)$ карточках, т.е. должно выполняться неравенство

$$k+r-1 < 2k+1-k-r = k-r+1$$

или $r<1$,

что противоречит нашему предположению.

ЗАДАЧА № 7

Представим $(6+\sqrt{37})^{999}$ в виде

$$(6+\sqrt{37})^{999} - (6-\sqrt{37})^{999} + (\sqrt{37}-6)^{999}$$

Первые два члена дают в сумме целое число, так как если их раскрыть по биному Ньютона, то все нечетные степени $\sqrt{37}$ взаимно уничтожаются. Поэтому все знаки после запятой числа $(6+\sqrt{37})^{999}$ совпадают с соответствующими знаками числа $(\sqrt{37}-6)^{999}$. Далее

$$\sqrt{37}-6=6(\sqrt{1+1/36}-1)<6\left(1+\frac{1}{72}-1\right)<\frac{6}{72}<\frac{1}{10}.$$

Поэтому

$$(\sqrt{37}-6)^{999}<\frac{1}{10^{999}},$$

откуда и следует утверждение задачи.

ЗАДАЧА № 8

Для $|x|>1$ имеем

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}(|x+1|+|x-1|)>\frac{1}{\sqrt{2}}=2^{-1/2}$$

и

$$2^{-|x|}<\frac{1}{2}.$$

Таким образом, для $|x|>1$ решений быть не может. Пусть $|x|\leq 1$. Тогда

$$|x+1|+|x-1|=2,$$

и наше уравнение приобретает вид

$$2^{-|x|}=\frac{1}{\sqrt{2}},\qquad \text{откуда } |x|=1/2.$$

Ответ: $x=\pm\frac{1}{2}$.

ОДНА ЗАДАЧА

И.И.КОРФЕЛЬД

Можно ли шар " замостить"окружностями не нулевого радиуса ?
(Ответ автору неизвестен).

ЗАДАЧА НАИЛУЧШЕГО ВЫБОРА

С. ГУСЕЙН-ЗАДЕ

С задачей наилучшего выбора приходится сталкиваться каждому. Мы хотим поступить в самую лучшую математическую школу (или институт), стремимся выбрать самую интересную книгу в библиотеке, посмотреть самый интересный фильм и т.п. Конечно, способ, которым мы будем действовать, зависит от того, какой информацией мы располагаем. Предположим, что, выйдя из школы, мы надумали пойти в кино. Сводной афиши поблизости не оказалось и мы решили заходить во все кинотеатры по дороге. Предположим, что все фильмы нам незнакомы, но, подойдя к кинотеатру, мы можем получить достаточно сведений о кинофильме, идущем здесь, для того чтобы сравнить его со всеми, идущими в кинотеатрах, где мы уже побывали. Естественно, что даже если фильм сравнительно плох, назад мы уже не пойдем. В какой момент сделать выбор?

Точная постановка этой задачи следующая.

Пусть все элементы конечного множества A как-то упорядочены по качеству. Мы выбираем один из этих элементов и считаем выбор удачным, если избранный элемент является одним из r наилучших в множестве A ($r \le n$ – заданное наперед число, определяющее уровень наших требований). Занумеруем элементы A в том порядке, как мы знакомимся с ними (предполагается, что этот порядок случаен, так что все $n!$ мыслимых перестановок одинаково вероятны). В момент t нам известны сравнительные качества элементов $a_1, a_2, \dots, a_t$, но мы ничего не знаем о качестве остальных

$(n-t)$ элементов множества A . Знакомясь с a_t, мы можем его либо принять (тогда выбор сделан), либо отвергнуть (тогда вернуться к этому элементу будет уже невозможно). Требуется найти оптимальную стратегию, обеспечивающую наибольшую вероятность удачного выбора.

Доказано, что существуют числа $1 \le \pi_1 \le \pi_2 \le \ldots \le \pi_r \le n$ (зависящие от r и от n), через которые оптимальная стратегия определяется следующим образом: пропускаем элементы $a_1, a_2, \ldots, a_{\pi_1}$; выбираем первый из элементов $a_{\pi_1}, \ldots, a_{\pi_2-1}$, лучший чем все предыдущие; если такого элемента нет, то выбираем первый из элементов $a_{\pi_2}, a_{\pi_2+1}, \ldots, a_{\pi_3-1}$, для которого среди предыдущих есть не более одного , лучшего него;...

Интересно предельное поведение чисел $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_r$ и вероятности удачного выбора ρ_n^r . Е.Б.Дынкиным *) было показано, что при $r=1$

$$\frac{\pi_1(n)}{n} \to \frac{1}{e}, \quad \rho_n^1 \to \frac{1}{e}.$$

При $r=2$ получаются следующие предельные соотношения $\frac{\pi_2(n)}{n} \to 2/3$ (интересно, что это число рационально) $\frac{\pi_1(n)}{n} \to \varphi$, где $\varphi = 0{,}347$ корень уравнения $\varphi - \ln\varphi = 1 + \ln 3/2$. Наконец, $\rho_n^2 \to 2\varphi - \varphi^2 \approx 0{,}547$ (больше I/2) . При произвольном r изучено поведение только последнего числа π_r

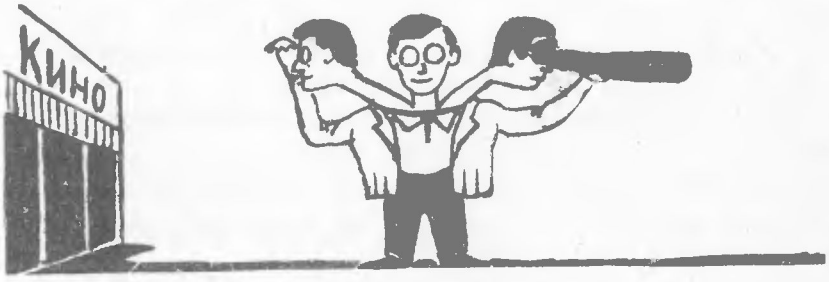
x/ См.Е.Б.Дынкин, Оптимальный выбор момента остановки марковского процесса. Доклады АН СССР №I50 (I963г), стр.238-240.

$$\frac{\pi_r(n)}{n} \to \begin{cases} 1/e & \text{при } r=1, \\ r-1\sqrt{\frac{r}{(r-1)!}} & \text{при } r>1. \end{cases}$$

Доказано, что если $r_n \to \infty$, то $\rho_n^{r_n} \to 1$. x/

Вернемся теперь к выбору кинофильма. Предположим, что кинотеатров всего 9, что все идущие в них кинофильмы различны по качеству и что мы хотим непременно посмотреть один из двух наилучших. Расчет показывает, что $\pi_1(9)=4$, $\pi_2(9)=6$, $\rho_9^2 \approx 0{,}6$. Следовательно, первые три кинофильма нужно пропустить, на 4-ом надо остановиться, если он лучше всех предыдущих; если это не так, но 5-й кинофильм лучше всех предыдущих, то надо остановиться на нем. Если и это не так, то надо выбрать первый из кинофильмов с номерами 6,7,8,9, который либо лучше всех предыдущих, либо уступает только одному из них. Вероятность того, что таким образом будет сделан удачный выбор, равна примерно 0,6.

Школа № 2, 10б класс.



x/ Доказательства всех сформулированных утверждений будут опубликованы в журнале " Теория вероятностей и ее применения".

ЛЕКЦИОННЫЙ КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА В 9-х КЛАССАХ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ШКОЛЫ-ИНТЕРНАТА № I8

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

А.СОСИНСКИЙ

Тема "Дифференцирование" изучается после тем "Непрерывность функции" и "Предел функции"; поэтому уже известны, в частности, теоремы об арифметических действиях с непрерывными функциями и пределами, теоремы о непрерывности и пределе сложной и обратной функций, некоторые леммы о пределах. Непрерывность (соответственно, предел) вводится лишь для функций, определенных в окрестности данной точки (соответственно, в окрестности с выколотой точкой); односторонняя непрерывность и предел для функций, определенных в соответствующих полуокрестностях. Действительные числа и их арифметические свойства "предполагаются известными", но постулируется достижение наибольшего значения функции, непрерывной на сегменте. Предела последовательности еще нет. Такой подход диктуется не столько личными вкусами лектора, сколько потребностями курса физики, который в физико-математической школе требует элементов анализа с самого начала.

5-1553

§ I2. Определение производной.

Начнем с двух задач, в которых естественно возникает понятие производной - основной объект изучения этой главы.

I) Пусть дан тонкий стержень (не обязательно однородный) OA. Масса той части стержня, которая находится между точками O и M, есть некоторая функция m от координаты x точки M ($x = OM$). Если взять точку M_h с координатой $x+h$ (h положительно или отрицательно), то средняя плотность отрезка MM_h будет:

$$\text{средняя плотность} = \frac{\text{масса}}{\text{длина}} = \frac{m(x+h)-m(x)}{h} = \bar{\rho}(h)$$

Если взять h "очень маленьким", то число $\bar{\rho}(h)$ будет "очень близким" к тому, что естественно называть плотностью в точке x ; отсюда целесообразность следующего определения плотности в точке :

$$\rho(x) = \lim_{h \to 0} \frac{m(x+h)-m(x)}{h}$$

2) Пусть материальная точка M движется прямолинейно (но не обязательно равномерно) по прямой Ox. Тогда координата точки M есть некоторая функция x от времени t. Если взять момент времени $t+h$ ($h>0$ или $h<0$), то средняя скорость на отрезке времени от t до $t+h$ будет:

$$\text{средняя скорость} = \frac{\text{расстояние}}{\text{время}} = \frac{x(t+h)-x(t)}{h} = \bar{v}(h)$$

Если взять h "очень маленьким", то полученное число $\bar{v}(h)$ будет "очень близким" к тому, что естественно считать мгновен-

ной скоростью в момент t ,откуда целесообразность следующего определения скорости:

$$v(t)=\lim_{h\to 0}\frac{x(t+h)-x(t)}{h}$$

Рассмотренные физические задачи привели нас к изучению предела при $h\to 0$ следующих двух разных по смыслу,но похожих по форме выражений:

$$\frac{x(t+h)-x(t)}{h} \qquad \frac{m(x+h)-m(x)}{h}$$

Подобные выражения возникают и во многих других задачах физики,геометрии,экономики,химии,кибернетики,... Как подобает математикам,мы будем изучать эти выражения,отвлекаясь от конкретного их смысла; именно,мы начнем со следующего общего определения.

Пусть f произвольная функция,определенная в окрестности точки x_0 .Тогда,если существует конечный предел

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=a,$$

то функция f называется дифференцируемой в точке x_0 ,число a называется производной функции f в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$ или $\frac{df}{dx}(x_0)$.

Примеры. I) $(x^3)'=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=$

$\lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3h^2x+h^3}{h}=\lim_{h\to 0}(3x^2+3hx+h^2)=3x^2.$

2) При $x=0$ имеем $(|x|)'=\lim_{h\to 0}\frac{|x+h|-|x|}{h}=$

$\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}$;

этот предел не существует, т.к. функция

$$\frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1 & \text{при } h>0, \\ -1 & \text{при } h<0 \end{cases}$$

не доопределяется до непрерывности.

Если функция f дифференцируема на некотором множестве точек $\mathcal{U}$, то каждой точке x из этого множества можно поставить в соответствие число $f'(x)$; полученная функция имеет область определения $\mathcal{U}$ и называется производной функции f (обозначение f' или $\frac{df}{dx}$). Итак:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Замечание 1. Если производная f' функции f сама дифференцируема, то ее производная $(f')'$ тоже является функцией и обозначается f'' (или $\frac{d^2f}{dx^2}$). Аналогично можно ввести третью производную f''', и вообще n-ую производную $f^{(n)}$ (или $\frac{d^nf}{dx^n}$).

Замечание 2. Можно ввести односторонние производные функции f по формулам:

$$f'_+(x) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \quad f'_-(x) = \lim_{h\to 0-} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

и доказать, что функция f дифференцируема тогда и только тогда, когда обе эти производные существуют и равны (см. §II). В этом случае $f'(x) = f'_+(x) = f'_-(x)$.

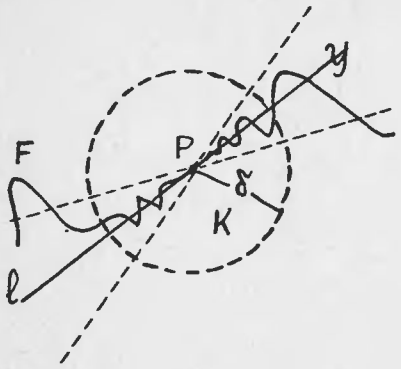
§ 13. Касание.

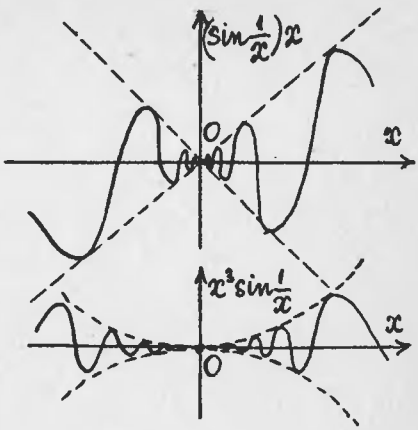
Касательной к окружности называют всякую прямую, которая имеет с окружностью ровно одну общую точку. А что такое касательная к гиперболе, к кубической параболе, да вообще к произвольной кривой? Чтобы ответить на этот вопрос, следовало бы сначала понять, что такое произвольная кривая. Заманчивое желание называть кривыми лишь те множества точек на плоскости, которые являются графиками непрерывных функций, приводит к тому, что окружность, парабола с осью не параллельной оси Oy, эллипс и др. придется не считать кривыми. Позднее мы вернемся к этому вопросу (в теме "Кривые в параметрической форме"), а пока определим касание в наиболее общей ситуации - для произвольных фигур (т.е. для произвольных множеств на плоскости).

Интуитивно, касательная в точке P к фигуре F - это такая прямая ℓ, проходящая через P, что секущие через близкие к P точки близки к ℓ (т.е. образуют с ℓ малый угол) Точное определение:

Прямая ℓ касается фигуры F в точке P, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что $F\cap K(P,\delta)\subset Y(P,\ell,\varepsilon)$ где $K(P,\delta)$ - круг с центром P и радиусом δ, а $Y(P,\ell,\varepsilon)$ - двухсторонний угол с вершиной P, величина которого равна 2ε, а ℓ - его биссектриса.

6-1553





Примеры. I) Если F окружность, то новое определение касания равносильно старому.

2) Если F состоит из конечного числа точек (этот случай не представляет никакого практического интереса), то всякая прямая $l \ni P \in F$ касается F.

3) Если F – график функции $x\sin\frac{1}{x}$ с добавленной точкой $(0,0)$, то в этой точке касательной нет.

4) Если F – график функции $x^3\sin\frac{1}{x}$ с добавленной точкой $(0,0)$, то ось Ox касается F в этой точке.

Теорема. Если функция f дифференцируема, то прямая l с угловым коэффициентом $f'(x)$, проходящая через точку $P(x, f(x))$, касается графика функции f в точке P.

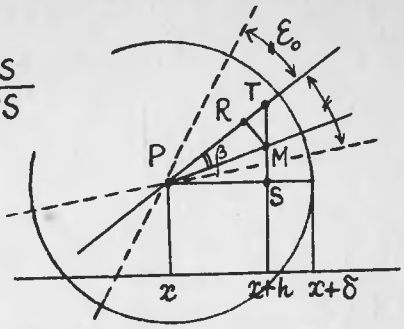
Доказательство. Пусть дано $\varepsilon_0 > 0$. Мы знаем, что

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$$

Но $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{MS}{PS}$ и $f'(x)=\frac{TS}{PS}$

Поэтому для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что при $|h|<\delta$

$$\left|\frac{MS}{PS}-\frac{TS}{PS}\right|<\varepsilon.$$



Далее

$$\varepsilon>\left|\frac{MS}{PS}-\frac{TS}{PS}\right|=\frac{MT}{PS}\geqslant\frac{RM}{PS}\geqslant\frac{RM}{PM}=\sin\beta.$$

Если взять $\varepsilon=\sin\varepsilon_0$, то $\sin\varepsilon_0>0$, и поэтому найдется δ, такое, что из $|h|<\delta$ следует

$$\sin\varepsilon_0>\frac{RM}{PM}=\sin\beta.$$

Но если $M\in F\cap O(P,\delta_0)$, то абсцисса $x+h$ точки M удовлетворяет условию $|h|<\delta$, поэтому $\sin\varepsilon_0>\sin\beta$, то есть $M\in\gamma(P,\ell,\varepsilon_0)$, что требовалось доказать.

Замечания. 1) В доказательстве допущена неточность, когда написано $\sin\varepsilon_0>0$ (ведь это верно не для всех $\varepsilon_0>0$), то есть не разобран случай $\varepsilon_0>\frac{\pi}{2}$. Исправьте и дополните сами.

2) Можно доказать и обратную теорему, которая утверждает, что касательная к графику дифференцируемой функции f имеет угловой коэффициент $f'(x)$.

Доказанная теорема объясняет геометрический смысл производной, который можно выразить формулой

$$f'(x)=\operatorname{tg}\alpha,$$

где α – угол от оси Ox до касательной.

§ 14. Дифференциал и непрерывность дифференцируемой функции.

Пусть f дифференцируема в точке x. Если обозначить

$$\gamma(h)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x),$$

то при $h\neq 0$ очевидно выполняется

$$f(x+h)-f(x)=f'(x)h+\gamma(h)\cdot h. \qquad (I)$$

Далее из определения дифференцируемости: $\lim\limits_{h\to 0}\gamma(h)=0$, поэтому функция

$$\tilde{\gamma}(h)=\begin{cases}\gamma(h) \text{ при } h\neq 0,\\ 0 \text{ при } h=0\end{cases}$$

непрерывна. Тогда из соотношения (I) и определения функции $\tilde{\gamma}(h)$ следует (верная для всех h) важная формула

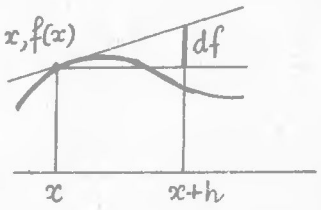
$$f(x+h)-f(x)=f'(x)h+\tilde{\gamma}(h)h, \qquad (\text{ФФ})$$

в которой $\tilde{\gamma}(h)$ непрерывна при $h=0$ и $\lim\limits_{h\to 0}\tilde{\gamma}(h)=0$.

Выражение $f'(x)\cdot h$ называется дифференциалом f и обычно обозначается df (дифференциал, при фиксированной точке x, можно рассматривать как функцию от h). Дифференциал, как мы потом увидим, используется для приближенных вычислений. Его геометрический смысл – "приращение касательной" (см. чертеж).

Из формулы (*) сразу следует

Теорема. Если f дифференцируема в x, то f непрерывна в x.



Доказательство. Имеем

$$f(x+h)-f(x)=f'(x)\cdot h+\tilde{\gamma}(h)\to 0$$

при $h\to 0$, т.е. $\lim_{h\to 0} f(x+h)=f(x)$, что требовалось доказать.

Замечание. Обратное утверждение не верно, как показывает пример функции $|x|$ (в точке $x=0$).

§ I5. Производная суммы, произведения и частного.

Теоремы A'', B'', C''. Если функции f и g дифференцируемы в точке x, то функции $f+g$, $f\cdot g$, f/g дифференцируемы *) в точке x, притом

$$(f+g)'=f'+g' \qquad (fg)'=fg'+gf' \qquad \left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{gf'-fg'}{g^2}$$

Доказательство легко получить из теорем A', B', C' (§ I0), теоремы из § I4, если воспользоваться следующими очевидными тождествами:

$$\frac{1}{h}\{(f(x+h)+g(x+h))-(f(x)+g(x))\}=\frac{1}{h}\{f(x+h)-f(x)\}+\frac{1}{h}\{g(x+h)-g(x)\},$$

---

*) Для функции $f:g$ дополнительно предполагается $g(x)\neq 0$

$$\frac{1}{h}\{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)\}=f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}+g(x+h)\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

$$\frac{1}{h}\left\{\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}\right\}=\frac{1}{g(x)g(x+h)}\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x)-f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right\}.$$

§ I6. Производная сложной и обратной функции.

Теорема I. Если функция g дифференцируема в точке x, а функция f дифференцируема в точке $g(x)$, то сложная функция $\varphi(x)=f(g(x))$ дифференцируема в точке x, притом

$$\varphi'(x)=f'(g(x))\,g'(x).$$

Доказательство. Имеем

$$\frac{1}{h}\{f(g(x+h))-f(g(x))\}=\frac{1}{h}\{f(g(x)+g(x+h)-g(x))-f(g(x))=$$

$$=\frac{1}{h}\{f'(g(x))\cdot(g(x+h)-g(x))-\tilde{\gamma}(g(x+h)-g(x))\cdot h\}=$$

$$=f'(g(x))\cdot\frac{g(x+h)-g(x)}{h}-\tilde{\gamma}(g(x+h)-g(x))\to f'(g(x))\cdot g'(x)$$

(см. § I4), так как $\lim\limits_{h\to 0}\tilde{\gamma}(g(x+h)-g(x))=0$ в силу теоремы о пределе сложной функции (§ I0), непрерывности функций g и $\tilde{\gamma}$ (см. § I4, (**)).

Замечание. Важно правильно понимать запись $f'(g(x))\cdot g'(x)$ которую мы поясним несколькими примерами:

$$\left(\sin\frac{1}{x}\right)'=\left(\cos\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x};$$

$$(\cos^2x^2)'=((\cos x^2)^2)'=2(\cos x^2)(\cos x^2)'=$$

$$=2\cos x^2\,(-\sin x^2)\,(x^2)'=-4x\cos x^2\sin x^2.$$

Теорема 2. Если f дифференцируема в точке $g(x_0)$, $f'(g(x_0)) \neq 0$ и функция g, обратная к f, дифференцируема в точке x_0, то

$$g'(x_0) = \frac{1}{f'(g(x_0))}.$$

Доказательство. По определению обратной функции (§9) имеем (для всех x из области определения g): $f(g(x)) = x$. Почленно дифференцируя это равенство и применяя теорему I, получим $f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0) = 1$, что и доказывает теорему 2.

§ I7. Исследование функций с помощью производных.

Нижеследующие теоремы будут использованы на занятиях для исследования функций и построения графиков.

Теорема I. (Необходимый признак экстремума). Если функция f дифференцируема в точке x и имеет в этой точке максимум (или минимум, или наибольшее значение, или наименьшее значение), то $f'(x) = 0$.

Доказательство. (Для случая максимума). Так как в точке x - максимум, имеем при $h_1 > 0$ и $h_2 < 0$

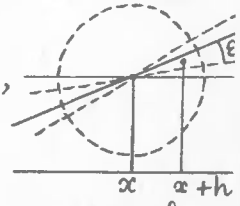
$$\varphi_1(h_1) = \frac{1}{h_1}\{f(x+h_1) - f(x)\} < 0 \text{ и } \varphi(h_2) = \frac{1}{h_2}\{f(x+h_2) - f(x)\} > 0,$$

откуда по леммам о пределах знакопостоянных функций (§I0, II): $\lim\limits_{h_1 \to 0+} \varphi(h_1) \leq 0$ и $\lim\limits_{h_2 \to 0-} \varphi(h_2) \geq 0$. Но, в силу дифференцируемости f и замечания 2 (§I2), имеем $\lim\limits_{h_1 \to 0+} \varphi(h_1) = \lim\limits_{h_2 \to 0-} \varphi_2(h_2) = f'(x)$. Следовательно, $0 \leq f'(x) \leq 0$, т.е. $f'(x) = 0$.

Замечания. I) Теорему I можно доказать от противного,

пользуясь теоремой о касании (§13).

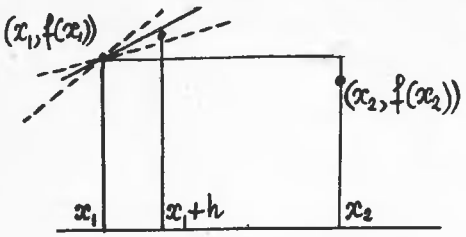
2) Если $f'(x)=0$, то нельзя еще заключить, что в точке x f имеет экстремум (например функция x^3 в точке $x=0$).



3) Если f определена на отрезке $[a,b]$, то наибольшее значение функции f может достигаться на конце a этого отрезка несмотря на то, что $f'_+(a)\neq 0$. Далее, если f определена не только на $[a,b]$, но еще и в двухсторонней окрестности точки a, то наибольшее значение функции f на отрезке $[a,b]$ может достигаться в точке a несмотря на то, что $f'(a)\neq 0$. Это не противоречит теореме I.

Теорема 2. (Достаточный признак монотонности). Пусть f дифференцируема на промежутке $\{\alpha,\beta\}$, притом для любого $x\in\{\alpha,\beta\}$ имеем $f'(x)>0$ (соотв., <0). Тогда f строго возрастает (соотв., убывает) на $\{\alpha,\beta\}$.

Доказательство (от противного, для случая $f'>0$). Пусть $f(x_1)\geq f(x_2)$, но $x_1<x_2$. Функция f непрерывна на $[x_1,x_2]$ и поэтому (см. §8) достигает наибольшего значения в некоторой точке $c\in[x_1,x_2]$. Не может быть $c=x_1$ или $c=x_2$; в самом деле, $f(x_1)\geq f(x_2)$, а в точке x_1 наибольшее значение не может достигаться в силу неравенства $f'(x_1)>0$ и теоремы о касательной (см. чертеж). А если $c\in(x_1,x_2)$ то в силу теоремы I имеем $f'(c)=0$, что противоречит условию $f'(x)>0$.



§ I8. Формула Тайлора и достаточные признаки экстремума

Мы уже встречались (§ 3, §I4) с равенствами

$$f(x+h) = f(x) + \gamma_0(h), \qquad (0)$$

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \gamma_1(h)\,h, \qquad (I)$$

в которых функции γ_0 и γ_1 имеют при $h \to 0$ предел, равный нулю. Эти равенства получались автоматически; ведь функции γ_0 и γ_1 определялись формулами:

$$\gamma_0(h) = f(x+h) - f(x),$$

$$\gamma_1(h) = \frac{1}{h}\{f(x+h) - f(x)\} - f'(x).$$

Стремление к нулю функции γ_0 (соотв., γ_1) получалось из непрерывности (соотв, дифференцируемости) функции f.

Формулы (0) и (I) дают способ приближенного вычисления значений функции в точке $x+h$ если известны ее значение (и значение производной) в близкой точке x. Например,

$$\sin(0+0{,}12) \approx \sin 0 = 0,$$

$$\sin(0+0{,}12) \approx \sin 0 + (\cos 0)(0{,}12) = 0{,}12,$$

в то время как таблицы дают $\sin(0{,}12) = 0{,}1197\ldots$ – получилось довольно точно (по второй формуле).

Оказывается, что кроме формул (0) и (I) можно получить целую серию подобных формул, которые позволяют вычислять функ-

ции приближенно с еще большей точностью, при условии, что функция f нужное число раз дифференцируема. Мы выведем сначала эти формулы для частного случая: возьмем в качестве f многочлен $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4$; непосредственным вычислением можно убедиться, что

$$p(x+h)=p(x)+p'(x)h+\frac{1}{2}p''(x)h^2+h^2\{h(4a_4x+a_4h+a_3)\} \quad (2)$$

$$p(x+h)=p(x)+p'(x)h+\frac{1}{2}p''(x)h^2+\frac{1}{2\cdot3}p'''(x)h^3+\{a_4h\}h^3 \quad (3)$$

$$p(x+h)=p(x)+p'(x)h+\frac{1}{2}p''(x)h^2+\frac{1}{2\cdot3}p'''(x)h^3+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}p^{IV}(x)+\{0\}h^4 \quad (4)$$

Заметим, что каждый раз функция в фигурных скобках имеет, при $h\to0$, предел равный нулю.

Теорема I (о формуле Тайлора). Если функция f n раз дифференцируема, то существует функция $\gamma(h)$ такая, что

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2!}f''(x)h^2+\ldots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x)h^n+\gamma(h)h^n$$

и $\lim\limits_{h\to0}\gamma(h)=0$.

Чтобы доказать эту теорему полагают

$$\gamma(h)=\frac{1}{h^n}\left\{f(x+h)-f(x)-\ldots-\frac{1}{n!}f^{(n)}(x)h^n\right\},$$

а затем доказывают, что $\lim\limits_{h\to0}\gamma(h)=0$. Мы отложим доказательство этого факта и будем пользоваться этой теоремой только в настоящем параграфе. Выпишем с помощью формулы Тайлора $(n=3)$ значение $\sin(0{,}12)$. Имеем

$$\sin(0+0{,}12)\approx\sin0+(0{,}12)\cos0-\frac{1}{2!}(0{,}12)^2\sin0+\frac{1}{3!}(0{,}12)^2\cos0=$$
$$=0{,}12000-0{,}00017=0{,}11972,$$

что совпадает с табличным значением.

Самостоятельно вычислите $\sqrt[3]{10}$ с помощью формулы Тайлора $(n=2)$ и сравните с табличным значением (указание: $10=2^3+2$).

Теорема 2 (достаточный признак экстремума и перегиба). Пусть функция n раз дифференцируема, притом $f'(x)=f''(x)=\ldots=f^{(n-1)}(x)=0$ и $f^{(n)}(x)\neq 0$. Тогда:

(1) если n нечетно, то f имеет перегиб в x (нет экстремума);

(2) если n четно и $f^{(n)}(x)<0$, то f имеет максимум;

(3) если n четно и $f^{(n)}(x)>0$, то f имеет минимум.

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что

$$f(x+h)-f(x)=\left\{\frac{1}{n!}f^{(n)}(x)+\gamma(h)\right\}h^n.$$

Если взять $\varepsilon=\frac{1}{2}\frac{1}{n!}|f^{(n)}(x)|$, то существует такое $\delta>0$, что $|\gamma(h)|<\varepsilon$ при $0<|h|<\delta$. Тогда (при $0<|h|<\delta$) знак выражения в фигурных скобках не зависит от h. Отсюда уже можно вывести все три пункта теоремы.

Результаты §17-18 являются центральными во всей теории непрерывных и дифференцируемых функций. Ради их практических приложений и строилась эта теория. Эти результаты позволяют легко решать не только возникающие в самой теории задачи, но и многие прикладные задачи, которые без этих результатов решить практически невозможно.

Заключительное замечание. В лекциях не были выведены формулы производных элементарных функций; они выводились стандартными способами на практических занятиях, с использованием лекционного материала. Подчеркнем, что ни на лекциях, ни на занятиях не вводились ни показательная, ни логарифмическая, ни степенная (с иррациональным показателем) функции. Заметим еще,

что из теоремы о производной обратной функции (§I6) не следует дифференцируемость обратно-тригонометрических и обратно степенных функций (хотя на занятиях мы пользуемся соответствующими формулами для производных). Аккуратное доказательство более сильного варианта теоремы об обратной функции будет получено после обоснования действительных чисел.

ПОПРАВКА

В сборнике 4-5 допущена неточность в списке преподавателей школы-интерната № I8 (стр.43). Одним из руководителей групп потока II-ых классов старого приема является М.В.Ломоносов - аспирант физического факультета МГУ.

ЛЕКЦИОННЫЙ КУРС МАТЕМАТИКИ В IO-х КЛАССАХ ШКОЛЫ №2

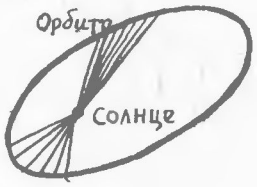
УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ И ЗАКОНЫ КЕПЛЕРА

А.ВЕНТЦЕЛЬ

Эта лекция будет посвящена применению математического анализа в физике (астрономии). Будут выведены законы Кеплера, касающиеся движения планет вокруг Солнца. Мы выведем их из закона всемирного тяготения и общих законов движения (законов Ньютона).

Сформулируем законы Кеплера. Их три.

I. Если соединить Солнце с планетой, то получится какой-то вектор, так называемый радиус-вектор планеты. При движении планеты радиус-вектор тоже движется и заметает какую-то площадь. I закон Кеплера состоит в том, что площади, заметаемые радиусом-вектором в равные промежутки времени, равны. Из этого закона следует, скажем, то, что вблизи Солнца планета движется быстрее, чем вдали (см.чертеж).



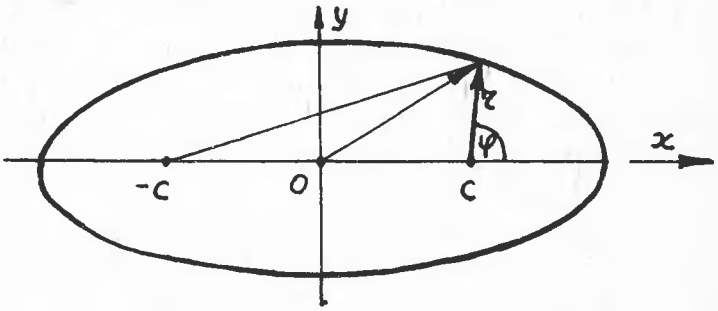
II. Планета движется по эллипсу , в одном из фокусов которого находится Солнце.

Третий закон, в отличие от первых двух, относится уже не к одной отдельной планете, а к связи между характеристиками движения разных планет.

III. Движение каждой планеты - периодическое и квадраты периодов для разных планет относятся как кубы больших полуосей их орбит (орбита - кривая, по которой дви-

жется планета, согласно II закону, - эллипс).

Нужно пояснить, что такое эллипс, его фокусы, большая полуось. Дело в том, что до сих пор мы знали об эллипсе только как о сжатой окружности, и ни о каких фокусах не было речи. Но есть другое определение эллипса: это - геометрическое место точек на плоскости, сумма расстояний которых до двух фиксированных точек этой плоскости, называемых фокусами, постоянна. Выведем уравнение эллипса в декартовых и в полярных координатах. Первое нам покажет, что определение эллипса с фокусами равносильно его определению как сжатой окружности; второе будет применяться при выводе законов Кеплера .



Обозначим расстояние между фокусами через $2c$, а сумму расстояний от точки эллипса до фокусов - через $2a$. Поместим начало декартовых координат в середине отрезка между фокусами, направим ось иксов так, чтобы она проходила через фокусы. Тогда условие принадлежности точки (x, y) эллипсу запишется так:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=(2a)$$

Избавляясь от корней, получаем после преобразований:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1. \qquad (*)$$

Как раз такое уравнение должно быть у сжатой окружности. Отрезок a – большая полуось эллипса, отрезок $b=\sqrt{a^2-c^2}$ – его малая полуось.

ЗАДАЧА. Мы вывели, что любая точка эллипса удовлетворяет уравнению $(*)$. Но при этом мы применяли неэквивалентные преобразования (возводили в квадрат). Докажите, что любая точка, удовлетворяющая $(*)$, принадлежит эллипсу. Иначе говоря, нужно доказать, что $(*)$ – уравнение эллипса. Теперь в полярных координатах. За полюс выберем правый фокус, а углы будем отсчитывать от положительного направления оси иксов (см.чертеж). Точка с координатами (r, φ) принадлежит эллипсу , если

$$r+\sqrt{r^2+4rc\cos\varphi+4c^2}=2a.$$

Избавляясь от корня и разрешая уравнение относительно r, получаем:

$$r=\frac{a^2-c^2}{a+c\cos\varphi}=\frac{1}{A+C\cdot\cos\varphi}. \qquad (**)$$

Здесь $A=\frac{a}{a^2-c^2}$, $C=\frac{c}{a^2-c^2}$, $0\leqslant C<A$.

Легко выразить обратно a и c или полуоси эллипса a и b через A и C .

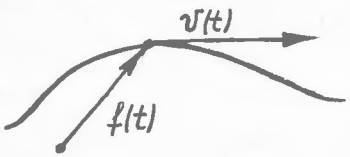
ЗАДАЧА. Докажите, что $(**)$ – уравнение эллипса.

ЗАДАЧА. Какая фигура задается уравнением $(**)$, если

$C>A>0$ или $A=C>0$?

Теперь поговорим о законах движения . Согласно второму закону Ньютона, ускорение равно силе, деленной на массу.

Но что такое ускорение ? Рассмотрим материальную точку, двигающуюся под действием какой-то силы. Ее положение можно задать при помощи вектора, ведущего в нее из какой-то фиксированной точки-начала отсчета. Так как наша точка движется, то этот



вектор будет зависеть от времени: $f(t)$. Скорость - это производная от этой векторной функции по времени: $v(t) = df(t)/dt$. Это - тоже вектор, он направлен по касательной к траектории. Ускорение - это производная от скорости $\frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2 f(t)}{dt^2}$ - тоже вектор. Если точка движется равномерно, но не прямолинейно, например, по окружности, то ускорение не будет равно нулю: вектор скорости будет поворачиваться. Итак, второй закон Ньютона получает такую математическую формулировку:

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} = \frac{F}{m}. \qquad (\spadesuit)$$

Здесь F - сила - тоже , как известно, вектор. Это - уравнение динамики материальной точки. Если сила равна 0 , то $\frac{df}{dt} = v_0 = const$, $f(t) = f_0 + v_0 t$,то есть точка движется равномерно и прямолинейно (первый закон Ньютона).

Теперь посмотрим, как будет двигаться планета под действием притяжения Солнца. Будем считать планету и Солнце материальными точками, причем Солнце возьмем за начало отсчета, будем считать его неподвижным (по третьему закону Ньютона планета действует с такой же силой на Солнце, как Солнце на планету; но так как масса Солнца неизмеримо больше, то, согласно второму закону Ньютона, планета сможет сдвинуть Солнце на величину, пренебрежимо

малую по сравнению с тем, на сколько Солнце сдвинет планету).

Согласно ньютоновскому закону притяжения, сила притяжения между материальными точками масс m и M на расстоянии r равна

$$|F| = \frac{\gamma M m}{r^2},$$

где γ – гравитационная постоянная. Мы поставили знак модуля, потому что сила – вектор, а здесь говорится только о численном значении. Направление же силы притяжения планеты Солнцем – к Солнцу.

Легко записать через вектор $f(t)$ единичный вектор, направленный в противоположную сторону, а затем и вектор силы F (учитывая, что $r = |f(t)|$):

$$F = -\frac{\gamma M m \cdot f(t)}{|f(t)|^3}$$

Подставляя это в уравнение динамики (♠), получаем уравнение движения планеты:

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} = -\frac{\gamma M f(t)}{|f(t)|^3} = \frac{-K f(t)}{|f(t)|^3}. \qquad (\clubsuit)$$

Это уравнение – дифференциальное уравнение. Поговорим немного о дифференциальных уравнениях. Начнем сначала с более простого случая.

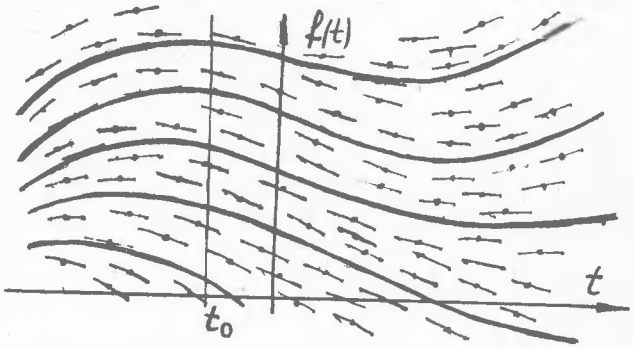
Дифференциальное уравнение первого порядка – это уравнение вида

$$\frac{df}{dt} = F(t, f), \qquad (1)$$

где f – неизвестная функция от числового аргумента t, принимающая значения в n – мерном векторном простран-

ство; а $F(t,f)$ - данная функция в $(n+1)$- мерном пространстве (одна координата t и n координат f), принимающая значения в n - мерном пространстве. Решить уравнение (I) - значит найти дифференцируемую функцию $f(t)$, при подстановке которой в (I) получится тождество.

Рассмотрим сначала одномерный случай. Задача тогда сводится к такой . На плоскости (t,f) в каждой точке



задано направление с тангенсом угла наклона $F(t,f)$. ("поле направлений"). Нужно провести кривую $f=f(t)$ ("интегральную кривую") так, чтобы она в каждой своей точке касалась направления, заданного в этой точке. Ясно, что вообще говоря, таких кривых будет бесконечное множество. Естественно ставить задачу так: провести интегральную кривую так, чтобы она проходила через заданную точку (t_o, f_o) ; или, иначе: найти решение уравнения (I), такое, что $f(t_o)=f_o$.

Имеют место следующие теоремы, которые мы доказывать не будем.

ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ. Если функция $F(t,f)$ - непрерывная функция от двух переменных, то для любого t_o и любого f_o существует решение уравнения (I), проходящее через точку (t_o, f_o).

ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ. Если при любом фиксированном t функция $F(t,f)$ дифференцируема по f и эта производная - непрерывная функция от t и f, то решение (I), такое, что $f(t_0)=f_0$, единственно. То же самое можно сказать и при произвольном числе измерений. При $n=2$ будет задано поле направлений в трехмерном пространстве, и надо будет провести кривую так, чтобы она касалась направлений, заданных в тех точках, через которые она проходит. Выполнены также и теоремы существования и единственности. Для их формулировки введем координаты по какому-то базису и запишем (I) как

$$\left.\begin{aligned} \frac{df_1}{dt} &= F_1(t,f_1,\dots,f_n);\\ &\dots\dots\dots\dots\\ \frac{df_n}{dt} &= F_n(t,f_1,\dots,f_n). \end{aligned}\right\}$$

Существование и единственность будут иметь место, если функции $F_1,\dots,F_n$ непрерывны и дифференцируемы по каждому из переменных $x_1,\dots,x_n$ при фиксированных остальных, причем эти производные непрерывны.

Но наше уравнение (✣) - уравнение второго порядка, то есть в его левой части стоит вторая производная. К счастью, понять, как обстоит дело для уравнений второго порядка, можно, сведя их к уравнению первого порядка. Это делается так. У нас одна (векторная) неизвестная функция f, или три числовых f_1, f_2, f_3. Введем еще три неизвестных функции - координаты, вектора скорости v_1, v_2, v_3. Тогда запишем:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dv_1(t)}{dt} &= -\frac{Kf_1(t)}{|f(t)|^3};\\ \frac{dv_2(t)}{dt} &= -\frac{Kf_2(t)}{|f(t)|^3}, \end{aligned}\right.$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dv_3(t)}{dt} &= -\frac{Kf_3(t)}{|f(t)|^3}, \\ \frac{df_1(t)}{dt} &= v_1(t); \\ \frac{df_2(t)}{dt} &= v_2(t); \\ \frac{df_3(t)}{dt} &= v_3(t). \end{aligned}\right\} \quad (\diamondsuit)$$

Итак, вместо дифференциального уравнения второго порядка в трехмерном пространстве мы получаем уравнение первого порядка в шестимерном пространстве. К нему применимы теоремы существования и единственности, так как правые части уравнений $(\diamondsuit)$ дифференцируемы по f_i и по v_i сколько угодно раз, если только $|f(t)| \neq 0$. Это означает, что, если мы зададим положение материальной точки f_0 в некоторый момент t_0 и ее начальную скорость v_0 в этот момент, то ее дальнейшее движение под действием притяжения Солнца определится однозначно, во всяком случае, до того момента, как она врежется в Солнце.

Сделаем из этого первый вывод относительно движения планет. Выберем ортонормированный базис, так чтобы первые два вектора базиса лежали в той плоскости, в которой лежат векторы f_0 и v_0. Тогда утверждается, что все дальнейшее движение будет происходить в той же плоскости (до попадания в Солнце, если оно будет). Действительно, рассмотрим функции $f_1(t), f_2(t), -f_3(t), v_1(t), v_2(t), -v_3(t)$. Они удовлетворяют тем же уравнениям $(\diamondsuit)$ и имеют те же начальные значения $f_1(t_0), f_2(t_0), 0, v_1(t_0), v_2(t_0), 0$. Поэтому по теореме единственности решение $(f_1, f_2, -f_3)$ должно совпадать с реше-

нием (f_1, f_2, f_3) , то есть $-f_3 = f_3$

Итак, перед нами - двумерная задача:

$$\frac{d^2 f_1(t)}{dt^2} = -K\frac{f_1(t)}{|f(t)|^3};$$

$$\frac{d^2 f_2(t)}{dt^2} = -K\frac{f_2(t)}{|f(t)|^3}.$$

Для нахождения решения и вывода законов Кеплера перейдем к полярным координатам:

$$f_1(t) = r(t)\cos\varphi(t);$$

$$f_2(t) = r(t)\sin\varphi(t).$$

Будем для краткости обозначать производную по t точкой вверху буквы. Имеем:

$$\dot{f}_1 = \dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi\cdot\dot{\varphi};$$

$$\dot{f}_2 = \dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi\cdot\dot{\varphi}; \qquad (\heartsuit)$$

$$\ddot{f}_1 = \ddot{r}\cos\varphi - 2\dot{r}\sin\varphi\cdot\dot{\varphi} - r\cos\varphi(\dot{\varphi})^2 - r\sin\varphi\cdot\ddot{\varphi} = -\frac{K\cos\varphi}{r^2},$$

$$\ddot{f}_2 = \ddot{r}\cos\varphi + 2\dot{r}\cos\varphi\cdot\dot{\varphi} - r\sin\varphi(\dot{\varphi})^2 + r\cos\varphi\cdot\ddot{\varphi} = -\frac{K\sin\varphi}{r^2}.$$

Выведем первый закон Кеплера. Для этого умножим первое из уравнений $(\heartsuit)$ на $-\sin\varphi$, второе - на $\cos\varphi$ и сложим. Получим:

$$2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0. \qquad (K)$$

Теперь вспомним, как выражается площадь, заметаемая радиусом - вектором за время от t_1 до t_2 :

$$\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} r^2(t)\dot{\varphi}(t)\,dt$$

Значит, $r^2\dot{\varphi}$ - это удвоенная скорость заметания площади. Она постоянна, так как в силу (K) ее производная $(r^2\dot{\varphi})=$ $=2r\dot{r}\dot{\varphi}+r^2\ddot{\varphi}=0$. Поэтому в равные промежутки времени заметаются равные площади. Итак,

$$\dot{\varphi}=\frac{W}{r^2}, \qquad (\Theta)$$

где W - постоянная - удвоенная скорость заметания площади.

Если $W=0$, то φ постоянно и точка движется по прямой, либо прямо к Солнцу, либо от Солнца. Но для планеты это не может быть; принимаем $W\neq 0$. Тогда с возрастанием времени t угол φ либо все время возрастает либо все время убывает. В обоих случаях соответствие между φ и t - взаимно однозначное. Поэтому исключим t из наших уравнений и перейдем к независимому переменному φ . Для этого умножим первое уравнение $(\heartsuit)$ на $\cos\varphi$, второе - на $\sin\varphi$ и сложим. Получим:

$$\ddot{r}-r(\dot{\varphi})^2=-\frac{K}{r^2},$$

или, подставляя $\dot{\varphi}$ из (Θ) :

$$\ddot{r}=\frac{W^2}{r^3}-\frac{K}{r^2}. \qquad (T)$$

Перейдем от производных по t к производным по φ (их мы будем обозначать не точкой, а штрихом). Имеем:

$$\dot{r}=\frac{dr}{dt}=\frac{dr}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt}=r'\cdot\frac{W}{r^2};$$

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt} = \frac{W}{r^2}\left(r''\frac{W}{r^2} - 2\frac{W}{r^3}(r')^2\right).$$

Подставляя это в (T), получаем:

$$r''\cdot\frac{W^2}{r^2} - 2\frac{W^2}{r^3}(r')^2 = \frac{W^2}{r} - K. \quad (\perp)$$

Это - дифференциальное уравнение, касающееся только формы орбиты; а характер движения по ней определяется уравнением (Θ). Чтобы вывести второй закон Кеплера, нужно доказать, что его решение имеет вид $(**)$.

Так как в $(**)$ r имеет более сложный вид, чем $\frac{1}{r}$, попробуем в уравнении $(\perp)$ перейти от неизвестной функции r к неизвестной функции $z = \frac{1}{r}$.

Имеем:

$$r = \frac{1}{z}\ ;\ r' = -\frac{z'}{z^2}\ ;$$

$$r'' = \frac{-z''z + 2(z')^2}{z^3}.$$

Подставляя это в $(\perp)$, получаем:

$$z'' + z = \frac{K}{W^2}. \qquad (\zeta)$$

Это - линейное дифференциальное уравнение. Решения соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения

$$z'' + z = 0$$

образуют, как легко проверить, линейное пространство. На основании теоремы единственности устанавливается, что оно

имеет размерность 2 (соответственно порядку уравнения). Что касается решений уравнения (ζ) ,тс они сбразуют двумерное линейное многообразие.

ЗАДАЧА. Докажите это.

Отсюда уже получается, что все решения (ζ) записываютоя в виде

$$z = \frac{K}{W^2} + C_1 \cos\varphi + C_2 \sin\varphi.$$

Этс можно преобразсвать к виду:

$$z = \frac{1}{\frac{K}{W^2} + C\cos(\varphi - \varphi_0)}.$$

Но это уже - уравнение ,отличающееся от $(**)$ только псворотсм на угол φ_0 . Если $0 < C < K/W^2$,то это,как и утверждалось, эллипс. Если же $C \geqslant K/W^2$,то при каких-то φ знаменатель обращается в ∞ . Это означает, что материальная точка не может совершить полного оборота вокруг Солнца, а уйдет от него на бесконечность. Для планет этогс не может быть, поэтому второй закон Кеплера доказан.

Теперь остается только вычислить через $\frac{K}{W^2}$ и C полуоси эллипса, найти его площадь и поделить ее на скорость заметания площади, и мы получим выражение для периода и доказательство третьего закона Кеплера.

ЗАДАЧА. Доказать, что период

$$T = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{K}} = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{\gamma M}}$$

ЗАМЕЧАНИЯ. Во-первых, по поводу третьего закона. Его можно применять не тольке к движению планет вокруг Солнца, но и спутников вокруг планет. Здесь уже M будет масса планеты. Это позволяет по наблюденным значениям a

и T для спутника найти массу планеты.

Второе замечание состоит в том, что исторически не законы Кеплера выводились из закона всемирного тяготения, а наоборот, установленные экспериментально законы Кеплера дали Ньютону возможность вывести закон тяготения (а не яблоко).

ЗАЧЕТ ПО ТЕМЕ "ДЛИНЫ, ПЛОЩАДИ, ОБЪЕМЫ".

В письменной части зачета все десятиклассники решали следующие задачи:

I. Стакан цилиндрической формы доверху наполнен водой. Стакан наклоняется так, что часть воды выливается, а оставшаяся часть покрывает ровно половину дна. Какая часть воды остается при этом в стакане ?

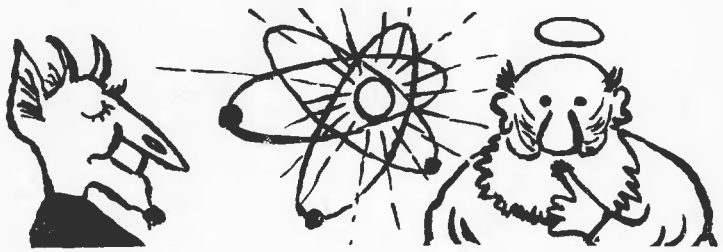
2. Рассматривается тело, являющееся выпуклой оболочкой нижнего основания цилиндра и фиксированного диаметра верхнего основания. Какую долю составляет объем этого тела от объема цилиндра.

3. Вычислить длину замкнутой кривой в четырехмерном пространстве, заданной уравнениями:

$$x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = \cos \frac{p}{q} \cdot t,$$

$$u = \sin \frac{p}{q} \cdot t,$$

где p/q - несократимая дробь.



ЛЕКЦИОННЫЙ КУРС МАТЕМАТИКИ В IO-х КЛАССАХ ШКОЛЫ № 2

ТЕМА 3. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ. КРИВЫЕ, ПОВЕРХНОСТИ И ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА.

М.М.ПОСТНИКОВ

§ I. ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ. ГИПЕРПЛОСКОСТИ.

Выражение линейного функционала l в данном базисе: если $x = \sum_i x^i e_i$, то $l(x) = \sum_i a_i x^i$, где $a_i = l(e_i)$. Линейные формы. Изменение линейной формы, выражающей данный линейный функционал, при изменении базиса: если $f_i = \sum_j c_i^j e_j$, то $l(f_i) = \sum_j c_i^j l(e_j)$. Гиперплоскости.

Сопряженное пространство. Его размерность.

Линейные функционалы в евклидовом пространстве. Отождествление их с векторами.

§ I. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ.

Примеры: изоморфизмы, ортогональные преобразования, проекторы. Ядро и образ оператора $\mathcal{A}$ (обозначения: $Ker\mathcal{A}$ и $Im\mathcal{A}$). Ранг оператора. Алгебра операторов. Проекторы как операторы, для которых $P^2 = P$ (задача). Обратимые операторы.

Выражение оператора в координатах: если $\sum_i y^i e_i = \mathcal{A}(\sum_j x^j e_j)$, то $y^i = \sum_j a_j^i x^j$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$; (a_j^i) - матрица оператора $\mathcal{A}$ по базису $e_1, \ldots, e_n$. (Замечание. В некоторых книгах матрицей оператора называется не эта матрица, а ей транспонированная).

Алгебра матриц. Изменение матрицы оператора при изменении базиса (как задача).

Инвариантные подпространства. Ограничение оператора. Собственные векторы и собственные значения.

§ 3. БИЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ.

Пример: скалярное произведение. Выражение билинейного функционала в координатах. Билинейные формы. Их матрицы. Пример: матрица Грама. Взаимнооднозначное соответствие между билинейными функционалами, билинейными формами и матрицами. Изменение матрицы билинейного функционала при изменении базиса (задача).

Симметрические и кососимметрические билинейные функционалы и матрицы. Разложение произвольного билинейного функционала в сумму симметрического и кососимметрического.

§ 4. КВАДРАТИЧНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ. ПОЛЯРНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ.

Функция $Q(x)$ называется квадратичным функционалом, если $Q(x)=B(x,x)$; где $B(x,y)$ – билинейный функционал. Если билинейный функционал $B(x,y)$ – симметрический, то он называется полярным для квадратичного функционала $Q(x)$. Если $Q(x)=B(x,x)$ и если $A(x,y)$ – симметрическая часть функционала $B(x,y)$, то $Q(x)=A(x,x)$. Поэтому для всякого квадратичного функционала существует полярный функционал. Этот функционал определяется по $Q(x)$ однозначно (доказать самим).

Выражение квадратичного функционала в координатах. Квадратичные формы . Взаимооднозначное соответствие между квадратичными функционалами, квадратичными формами и симметрическими матрицами.

Положительно определенные квадратичные функционалы.

§ 5. БИЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ. СОПРЯЖЕННЫЕ И САМОСОПРЯЖЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ.

Всякий билинейный функционал в евклидовом пространстве представляется (и притом однозначно) в виде (Ax, y), а также в виде $(x, A'y)$. Линейные операторы A и A' называются сопряженными. Самосопряженные операторы, симметрические билинейные функционалы и квадратичные функционалы.

Ортогональность собственных векторов самосопряженных операторов. Ортогональное дополнение инвариантного под-пространства самосопряженного оператора инвариантно.

§ 6. ПРИВЕДЕНИЕ К ГЛАВНЫМ ОСЯМ.

ЛЕММА. Для любого самосопряженного оператора A существует собственный вектор.

Рассмотрим квадратичный функционал (Ax, x) и пусть

$$\lambda_0 = \min_{|x|=1} (Ax, x).$$

Тогда $(Ax, x) - \lambda_0 (x, x) \geq 0$ для любого $x \in V$. В силу компактности сферы существует вектор x_0, для которого $(Ax_0, x_0) - \lambda_0 (x_0, x_0) = 0$. Рассмотрим функцию

$$f(t) = (A(x_0 + ty), x_0 + ty) - \lambda_0 (x_0 + ty, x_0 + ty),$$

где y - произвольный вектор. Эта функция неотрицательна и $f(0) = 0$. Таким образом, в точке 0 она имеет минимум и потому $f'(0) = 0$. Но,

$$f(t) = (Ax_0, x_0) + 2t(Ax_0, y) + t^2(Ay, y) - \lambda_0 (x_0, x_0) - 2\lambda_0 t(x_0, y) - t^2(y, y) = 2t(Ax_0 - \lambda_0 x_0, y) + t^2((Ay, y) - \lambda_0 (y, y))$$

и потому

$$f'(0) = 2(Ax - \lambda_0 x_0, y).$$

Таким образом,

$$(\mathcal{A}x_0 - \lambda_0 x_0, y) = 0.$$

В частности, полагая $y = \mathcal{A}x_0 - \lambda_0 x_0$, мы получим отсюда, что

$$(\mathcal{A}x_0 - \lambda_0 x_0, \mathcal{A}x_0 - \lambda_0 x_0) = 0,$$

то есть, что

$$\mathcal{A}x_0 - \lambda_0 x_0 = 0.$$

Следсвательно, x_0 является собственным вектором оператора $\mathcal{A}$ с собственным значением λ_0 .

СЛЕДСТВИЕ (доказывается по индукции). Для любого самосопряженного оператора существует ортонормированный базис ,состоящий из собственных векторов. В этом базисе матрица оператора диагональна.

Другими словами, имеет место следующая

ТЕОРЕМА О ПРИВЕДЕНИИ К ГЛАВНЫМ ОСЯМ. Для любого квадратичного функционала существует ортонормированный базис, в котором он выражается квадратичной формой вида

$$\lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2.$$

ЗАДАЧА. Доказать, что числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ однозначно определяются данным функционалом. (При решении будьте осторожны!).

§ 7. ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА.

Общий неоднородный квадратичный функционал имеет вид

$$\Phi(x) = (\mathcal{A}x, x) + (\ell, x) + c,$$

где $\mathcal{A}$ - самосопряженный оператор,
ℓ - вектор,
c - число.

Совокупность точек, удовлетворяющих уравнению

$$\Phi(x) = 0,$$

называется гиперповерхностью второго порядка.

Пусть $x = y + f$, где f - постоянный вектор ("вектор сдвига"). Тогда та же гиперповерхность задается уравнением

$$\psi(y) = 0,$$

где

$$\psi(y) = (Ay, y) + (\ell + 2Af, y) + (C + (Af, f) + (\ell, f)).$$

Точка x_0 называется центром гиперповерхности $\Phi(x) = 0$, если для любой ее точки x, точка $2x_0 - x$ также принадлежит гиперповерхности. Точка 0 тогда и только тогда является центром, когда $\ell = 0$. Гиперповерхность, обладающая центром, называется центральной.

ТЕОРЕМА. Если оператор A обратим, то гиперповерхность центральна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Центром является точка x_0, для которой

$$Ax_0 = -\ell/2$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Обратное утверждение неверно.

Классификация центральных гиперповерхностей. Четыре типа:

I°) $(Ax, x) = 1$ и A обратим (невырожденные гиперповерхности);

2) $(Ax, x) = 1$ и A необратим (цилиндры);

2а) $(Ax, x) = 0$ и A обратим (конусы);

2б) $(Ax, x) = 0$ и A необратим (цилиндро-конусы).

Дальнейшая детализация классификации. Случай $n = 2$ и $n = 3$.

НЕЦЕНТРАЛЬНЫЕ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ. В этом случае, не теряя общности, можно считать, что $\ell \perp \operatorname{Im} A$.

ЛЕММА. Для любого самосопряженного оператора

$$V = \operatorname{Im} A + \operatorname{Ker} A.$$

СЛЕДСТВИЕ. $l \in \operatorname{Ker} A$.

ТЕОРЕМА. Уравнение любой нецентральной поверхности можно привести к виду

$$(Ax, x) = (l, x) \quad , \text{ где } l \perp \operatorname{Im} A$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достатсчно произвести сдвиг на вектор kl , где $k = -(l,l)/(l,l)$.

Следовательно, координаты можно всегда выбрать так, чтобы гиперповерхность задавалась уравнением

$$\lambda_1 x_1^2 + \ldots + \lambda_r x_r^2 = 2x_{r+1}.$$

При $r = n-1$ получаем параболоиды, а при $r < n-1$ - цилиндры.

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

I. Функционал $l(x)$, заданный в эвклидовом пространстве L , называется непрерывным, если $\forall (x \in L)$

$$\forall (\varepsilon > 0)\, \exists (\delta > 0) : \forall (x' : |x - x'| < \delta)\ |l(x) - l(x')| < \varepsilon.$$

Доказать, что всякий непрерывный функционал $l(x)$, такой, что $l(x+y) = l(x) + l(y)$ - линеен.

2. Даны линейная форма $\sum_{k=1}^{n} a_k x^k$ и линейный функционал $l(x)$, определенный в n - мерном линейном пространстве V. Доказать, что в V найдется базис $e_1, e_2, \ldots e_n$, в котором $l(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x^k$.

3. Если $l_1, l_2, \ldots l_r$ - независимые линейные функционалы, заданные в n - мерном линейном пространстве V , то

$$L_r = \{ x : l_1(x) = 0,\ l_2(x) = 0, \ldots,\ l_r(x) = 0 \}$$

линейное подпространство V , причем $\dim L_r = n - r$.

4. Найдется многочлен $q_n(t)$, степени не выше чем n , такой, что для любого многочлена $p(t)$ степени не

выше чем n выполняется равенство

$$\int_0^1 p(t)dt = \int_{-1}^{+1} q_n(t)p(t)dt.$$

5. Найдется многочлен $S_{n,k}(t)$ степени не выше, чем n, такой, что для любого многочлена $p(t) = a_0 + a_1 t + \dots a_k t^k + \dots + a_n t^n$

$$a_k = \int_{-1}^{+1} S_{n,k}(t)p(t)dt.$$

6. Если $l(x) = 0$ тогда и только тогда, когда $l_1(x) = 0$ (l и l_1 – линейные функционалы); то $l = c\,l_1$, где c – число.

7. Пусть V_1 и V_2 – подпространства n – мерного векторного пространства V, причем

а) $V_1 \cap V_2 = 0$

б) $\dim V_1 + \dim V_2 = n$.

Доказать, что

$$V = V_1 \dotplus V_2.$$

8. Пусть A – линейный оператор, переводящий n – мерное векторное пространство V в себя. Положим

$$\mathrm{Ker}\,A = \{x : Ax = 0\},$$

$$\mathrm{Im}\,A = \{x : x = Ay,\ y \in V\}.$$

а) Доказать, что $\mathrm{Ker}\,A$ и $\mathrm{Im}\,A$ – подпространства V.

б) $\dim \mathrm{Ker}\,A + \dim \mathrm{Im}\,A = n$.

в) Привести примеры, когда $\mathrm{Im}\,A \supset \mathrm{Ker}\,A$, $\mathrm{Im}\,A = \mathrm{Ker}\,A$, $\mathrm{Im}\,A \subset \mathrm{Ker}\,A$.

9. Доказать, что линейный оператор P является оператором проектирования тогда и только тогда, когда $P^2 = P$.

10. Доказать, что матрица C перехода от одного бази-

са к другому обратима, причем если оба базиса ортонормированные, то $C' = C^{-1}$.

II. Привести пример линейных операторов A и B, таких, что $AB \neq BA$.

I2. Пусть операторы A и B обратимы. Доказать, что $(A^{-1})^{-1} = A$, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

I3. Найти матрицу, обратную к матрице $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ (при условии, что $\det A = ad - bc \neq 0$).

I4. Линейный оператор A называется оператором отражения, если найдется базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ такой, что

$$Ae_1 = e_1, \ldots, Ae_k = e_k, Ae_{k+1} = -e_{k+1}, \ldots, Ae_n = -e_n.$$

Доказать, что если $A^2 = E$, то оператор A – оператор отражения.

I5. Пусть A – отображение n – мерного эвклидова пространства в себя, сохраняющее скалярное произведение. Доказать, что A – линейный оператор.

16. Вычислить размерность пространства всех линейных операторов в n –мерном векторном пространстве.

17. Пусть D – оператор дифференцирования в пространстве всех многочленов степени не выше, чем n. Пусть T_h – оператор в том же пространстве, определенный формулой $T_h P(t) = P(t+h)$. Выразить оператор T_h через D. Написать матрицы операторов D и T_h по базису $1, t, \ldots t^n$.

18. Доказать, что линейный оператор A обратим тогда и только тогда, когда он переводит в нуль только нулевой вектор. Доказать, что это утверждение переотает быть верным для операторов в бесконечномерном пространстве.

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПО ТЕМЕ
" КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА "

Ю. МАНИН

(для 9-х классов школы № 2)

I. Указать на плоскости $z=x+iy$ области, где:

1) $\mathrm{Re}\, z>0$;
2) $\mathrm{Im}\, z<0$
3) $\mathrm{Re}\, z<0$, $\mathrm{Im}\, z>0$;
4) $|z|<1$;
5) $\arg z=\varphi$;
6) $|z-a|=c$;
7) $|z-a|<c$, $|z-a|>c$;
8) $c_2<|z-a|<c_1$, $\mathrm{Im}\, z>0$;
9) $0<(\arg z_1)<\varphi$.

2. Найти геометрическое место точек

а) $\left|\frac{z-1}{z+1}\right|=1$;

б) $\left|\frac{z-1}{z+1}\right|=2$;

в) $\left|\frac{z-1}{z+1}\right|=c$.

3. Комплексная функция
$w=az+b \quad a,b\in C$

а) переводит ли прямые в прямые ?

б) переводит ли окружность в окружность ?

4. Во что переводит отображение $w=\bar{z}$ окружность, круг, прямую, правую полуплоскость ?

5. Отображение $w=1/\bar{z}$ называется инверсией. Доказать, что при инверсии

а) прямые, проходящие через 0, переходят в себя,

в) окружности и прямые переходят в окружности и

прямые соответственно,

с) углы сохраняются.

6. Изобразить на комплексной плоскости

$\sqrt[10]{1}$; $\sqrt[3]{-1}$; $\sqrt[5]{i}$

7. Если $|z|=3$,то где расположены на плоскости точки, изображающие комплексные числа:

а) $-z$, в) $-1+2z$, с) $-2-z$.

8. Где расположены на плоскости точки, для которых:

$|z|=1$? $1<|z|<2$? $|z-i|=2$?

9. Записать в тригонометрической форме комплексные числа:

$z=3+3i$, $z=-6-8i$, $z=\frac{1}{2}i$.

IO. Найти целые числа n , для которых

$(1+i)^n=(1-i)^n$.

II. При каких действительных значениях x и y

$-3+ix^2y$ и x^2+y+4i

будут комплексно сопряженными.

I2. Пусть комплексное число $z\neq -1$. Доказать:

а) если $|z|=1$, то число $\frac{z-1}{z+1}$ - чисто мнимое.

в) если $\frac{z-1}{z+1}$ - чисто мнимое, то $|z|=1$.

I3. Найти вещественные решения системы:

$$\begin{cases} x-i=yi \\ x-i^2=2a-y, \end{cases}$$

где a - комплексный параметр.

I4. Найти сумму K – ых степеней корней n – ой степени из I.

I5. Найти произведение всех корней n –й степени из I.

I6. Найти

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2^2}\cos 2x+\ldots+\frac{1}{2^n}\cos nx\right).$$

I7. Дан многочлен n –й степени от z $P_n(z)$ с вещественными коэффициентами. Пусть он имеет корень z_0, т.е. $P_n(z_0)=0$. Доказать: $P_n(\bar{z}_0)=0$.

I8. Дано n комплексных чисел, сумма которых равна 0. Доказать: найдется хотя бы два числа, разность аргументов которых $>120^\circ$.

I9. Пусть многочлен z^3+az^2+bz+c имеет три комплексных корня z_i, расположенных в вершинах правильного треугольника. Доказать: многочлен $3z^2+2az+b$ имеет корень в центре этого треугольника.

20. Пусть на комплексной плоскости дан правильный n – угольник. Доказать, что тогда существуют такие два комплексные числа a, b, что вершины n – угольника имеют вид

$$az_1+b,\ az_2+b,\ \ldots,\ az_n+b,$$

где $z_1,\ldots,z_n$ – все корни n –й степени из I.

2I. Вычислить вещественную и мнимую части $\sqrt{a+bi}$.

КОНКУРСНЫЕ ЗАДАЧИ

I. Дана окружность радиуса I. Доказать: для любого $0<\varphi_0\le 2\pi$ и любого $\varepsilon>0$ найдется натуральное n, что $|e^{in}-e^{i\varphi_0}|<\varepsilon$ (напомним, что по определению $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$).

2. Даны два многочлена $P(z_1,z_2)$ и $Q(z_1,z_2)$. Известно, что при всех z_1, z_2 [в соотв. точках]

$$|P(z_1,z_2)|\ge|Q(z_1,z_2)|.$$

Доказать: $P(z_1, z_2) = kQ(z_1, z_2)$ k - число.

3. Рассмотрим произвольный многочлен $P_n(z)$. Доказать, что существует только конечное количество таких комплексных чисел a_i, что среди коэффициентов $b_0, \ldots, b_n$ многочлена $P_n(z+a_i)$ есть нулевой коэффициент. Сколько их может быть? Дать верхнюю границу в зависимости от n.

4. Найти произведение длин всех диагоналей правильного n - угольника, вписанного в единичную окружность.

5. Пусть $f(z)$ - непостоянный многочлен с комплексными коэффициентами. Доказать, что максимум $|f(z)|$, когда z меняется в единичном круге, достигается на границе этого круга. Сохранится ли теорема, если единичный круг заменить любым? А произвольной областью?

6. Доказать, что $e^z = \lim (1 + \frac{z}{n})^n$ для любого комплексного z.

СЕМИНАРСКИЕ ЗАНЯТИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ В 7-х КЛАССАХ ШКОЛЫ № 2

Л.ГОЛОВИНА

В каждом из двух классов школы № 2 помимо обычных уроков математики проводятся один раз в неделю два часа семинарских занятий. По своему характеру они похожи на занятия университетских математических кружков для школьников.

На занятиях в 7б классе были рассмотрены следующие вопросы[x/]:

I. ПРОСТЫЕ И СОСТАВНЫЕ ЧИСЛА.

Определение простого числа. Бесконечность множества простых чисел. Существование сколь угодно длинных отрезков натурального ряда, не содержащих простых чисел. Построение последовательности простых чисел с помощью решета Эратосфена.

2. НАИБОЛЬШИЙ ОБЩИЙ ДЕЛИТЕЛЬ. ОДНОЗНАЧНОСТЬ РАЗЛОЖЕНИЯ ЧИСЛА НА ПРОСТЫЕ МНОЖИТЕЛИ.

Определение общего наибольшего делителя. Наибольший общий делитель чисел a и b, как наименьшее положительное число вида $ax+by$, где x и y - целые. Лемма о том, что если произведение двух натуральных чисел делится на простое число p, то хотя бы один из сомножителей делится на p. Однозначность разложения натурального числа на простые множители. Все делители числа $a=p_1^{k_1}p_2^{k_2}\dots p_n^{k_n}$ получаются, если раскрыть скобки в произведении

$$(1+p_1+p_1^2+\dots+p_1^{k_1})(1+p_2+p_2^2+\dots+p_2^{k_2})\dots(1+p_n+p_n^2+\dots+p_n^{k_n})$$

и, значит, общее число делителей равно $(k_1+1)(k_2+1)\dots(k_n+1)$. Алгоритм Евклида.

3. ТЕОРЕМА ЭЙЛЕРА.

Связная сеть линий на плоскости, Формула Эйлера: $k-r+v=2$, где k - число областей, на которые сеть

x/ Занятиями в 7а классе руководит О.В.Локуциевский, занятиями в 7б - Л.И.Головина.

разбивает плоскость, r - число границ, V - число вершин. Провзрка этой формулы для дерева (сети, не содержащей замкнутых контуров). Доказательство общей формулы : стирая одну из границ какой-нибудь области, уменьшаем на единицу число областей и число границ; повторяя эту операцию $K-1$ раз, приходим к дереву.

Теорема Эйлера для сеток на сфере и для многогранников.

Если k_S - число областей с S границами и если каждая граница разделяет две области, то $k_1+k_2+k_3+\ldots=k$, $k_1+2k_2+3k_3+\ldots=2r$. С помощью этих соотношений и теоремы Эйлера решаются, например, следующие задачи:

I) На плоскости даны 5 точек. Доказать, что нельзя каждую из них соединить непересекающимися линиями со всеми остальными.

2) Имеются три дома и три колодца. Доказать, что нельзя соединить каждый из домов с каждым из колодцев непересекающимися дорожками.

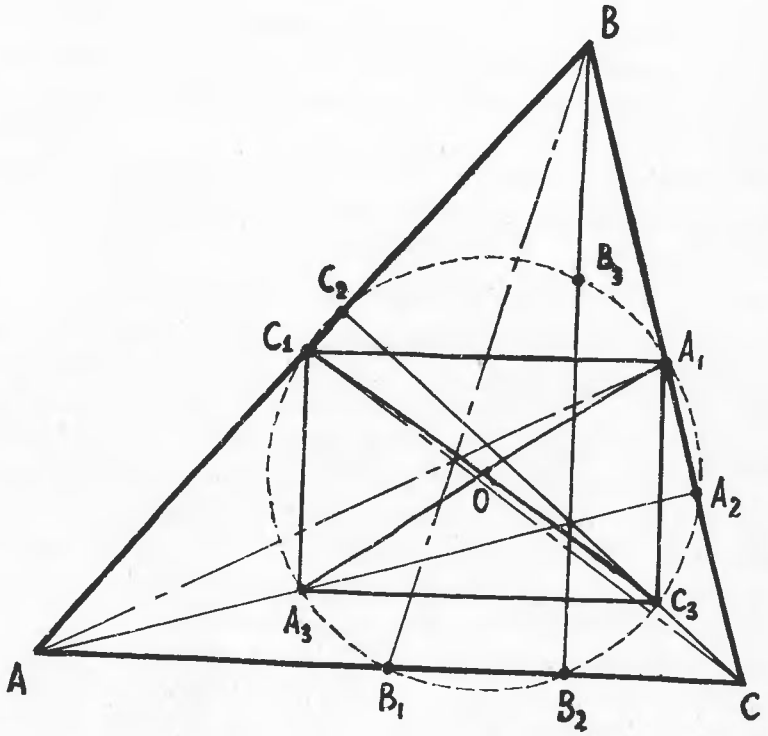
4. ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ЛИНИИ И ТОЧКИ В ТРЕУГОЛЬНИКЕ.

Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке - центре вписанной окружности. Биссектрисы одного внутреннего и двух внешних углов пересекаются в одной точке - центре вневписанной окружности (таких окружностей три). Перпендикуляры, проведенные через середины сторон треугольника пересекаются в одной точке - центре описанной окружности. Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся в ней в отношении 2:I (центр тяжести треугольника). Высоты треугольника пересекаются в одной точке (ортоцентр).

Во всяком треугольнике ABC середины сторон A_1,B_1,C_1 , основания высот t_2,B_2,C_2 и середины отрезков, соединяющих ортоцентр с вершинами A_3,B_3,C_3 , лежат на одной окружности (круг девяти точек) . С помощью теоремы о средней линии треугольника доказывается, что четырехугольник $A_1C_3A_3C_1$ - прямоугольник, значит его диагонали A_1A_3 и C_1C_3 равны и в

точке пересечения O делятся пополам: $OA_1 = OC_1 = OA_3 = OC_3$

Аналогично, четырехугольник $C_1B_3C_3B_1$ - прямоугольник и значит $OC_1 = OB_1 = OB_3 = OC_3$. Таким образом, точки $A_1, B_1, C_1, A_3, B_3, C_3$ лежат на одной окружности. На той же окружности лежат и точки A_2, B_2, C_2, так как опирающиеся на диаметры углы $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$ и $C_1C_2C_3$ - прямые.



О ПРИЕМЕ НА МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ М Г У В 1965 ГОДУ

Беседа с председателем экзаменационной комиссии профессором П.Л.УЛЬЯНОВЫМ

Прием в высшие учебные заведения в 1965 году проводился по новым правилам. Лица, окончившие среднюю школу с золотыми и серебряными медалями и сдавшие на пятерки экзамены по профилирующим дисциплинам зачислялись без сдачи остальных экзаменов. По этому правилу на механико-математический факультет были приняты 40 медалистов, получивших пятерки на письменном и устном экзаменах по математике. Пять победителей международной математической олимпиады были зачислены без экзаменов специальным приказом министра Высшего образования. Для лиц, имевших производственный стаж не менее двух лет и воинов ,демобилизованных из Советской армии,проводился отдельный конкурс.

Конкурс проводился по трем экзаменам: устный и письменный экзамены по математике и устный экзамен по физике.Кроме того сдавался письменный экзамен по литературе (сочинение). Были зачислены все набравшие 15 и 14 очков и свыше 80% набравших 13 очков. При отборе последних учитывалась средняя отметка из аттестата по математике, отметка из аттестата по физике и отметка на вступительном экзамене по литературе (были приняты все, у кого таким образом получалось 14 или 15 очков).

Расскажем,как проходили экзамены,и остановимся на некоторых уроках, которые можно из них извлечь.

Для письменного экзамена по математике было подготовлено шесть основных вариантов задач и один резервный вариант (эти задачи опубликованы в сборнике " Математическая школа"№ 3)[x/] . В каждом варианте было 4 задачи. На

x/ При этом в формулировке задачи 4 варианта I была допущена опечатка. Правильный вид уравнения: $\cos x+\cos y-\cos(x+y)=3/2$.

их решение давалось 4 часа. Выходить из аудитории до полного окончания работы воспрещалось. Во время проверки работ решение каждой задачи оценивалось одним из знаков: +, $\pm$, $\pm$, $\mp$, , , −. Знаком + оценивались верные и полные решения. Если была допущена ошибка, не имевшая принципиального характера и не искажавшая общего хода вычислений, то ставилась оценка $\pm$. Если случайная ошибка приводила к некоторому изменению характера задачи, то ставили $\pm$. Наконец, знак $\mp$ означал, что решение неполно или неправильно, но содержит какие-то весомые части, которые можно поста - вить в заслугу экзаменующемуся.

При выставлении оценок принималась во внимание и сравнительная трудность задач, о которой можно было судить по числу правильных решений. Вторые и третьи задачи получили примерно одинаковое число правильных решений. Первые задачи решило почти вдвое больше писавших, чем вторые, а четвертые в 5 раз меньше, чем вторые (или третьи). Следующая табличка показывает относительную трудность задач по вариантам (номера вариантов выписаны в порядке возрастания числа решивших соответствующую задачу):

номер задачи	номера вариантов					
I	I	4	3	5	2	6
2	4	5	2	3	I	6
3	6	2	3	I	4	5
4	4	3	5	6	2	I

Отметим некоторые распространенные ошибки и недостатки, выявившиеся на экзаменах по математике.

I. Неумение аккуратно провести выкладки. Из-за этого неумения часто оставались нереализованными совершенно правильные идеи, и задачу приходилось оценивать знаками $\pm$, $\pm$ или даже $\mp$. Важнейшим элементом культуры вычислений явля-

ется постоянный самоконтроль. (Можно, например, следить за правильностью вычислений, подставляя в формулы некоторые частные значения параметров или рассматривая простейшие предельные случаи). Между тем многие поступавшие не замечали ошибки, даже приходя к совершенно нелепым результатам. Следует отметить, что пятерками оценивались только работы, в которых кроме умения найти верный путь решения, было показано также умение правильно вычислять.

2. Неумение соединить вычисления с логическим анализом задачи. (Например, учесть при вычислениях ограничения на область изменения переменной x, вытекающие из определения логарифмической функции $\log x$ или рациональной функции $P(x)/Q(x)$ т.п.)

3. Ошибочное оперирование с логарифмической функцией, неумение обращаться с модулями.

4. Много ошибок было допущено при оперировании с неравенствами, содержащими неизвестное. Например, такие неравенства необоснованно возводились в квадрат. Делались ошибки при освобождении от знаменателей.

5. Особенную трудность вызывали задачи, требовавшие соединения навыков, приобретенных в разных разделах курса (например, использование свойств неравенств для нахождения всех решений тригонометрического уравнения).

6. У многих вызывала затруднения стереометрия. В частности, затруднения с геометрическими задачами в письменной работе вызывались иногда неумением правильно нарисовать сечение многогранника плоскостью.

7. Не редкостью были логические ошибки при образовании отрицания некоторого высказывания.

Несколько слов о том, как проводился устный экзамен. Каждому экзаменующемуся давалось для подготовки ответа не менее 45 минут. Как правило, опрос начинался не позд-

нее чем через I,5 часа после того, как был взят билет. Каждый отвечал помимо билета на ряд дополнительных вопросов. Для подготовки ответов на эти вопросы давалось дополнительное время, так что весь ответ продолжался до одного часа. В качестве дополнительных вопросов требовали построить график, найти геометрическое место точек (часто в пространстве), решить то или иное уравнение и т.д.

Сдавшие экзамен выпускники математических школ иногда предпочитали стандартному изложению по школьному учебнику использование известных им сведений из математического анализа и других разделов математики. Это не считалось ни специальным достоинством, ни недостатком. Однако, во всех случаях требовалось ясное понимание используемых общих предложений.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА № 444

(Первомайский район Москвы, Нижняя Первомайская, дом I4, тел. Е 5-23-52).

Школа № 444 начала математическую специализацию учащихся в одном из своих IX классов в I959 году. За истекшее время в работе с учащимися многое изменилось, усовершенствовалось.

Школа подшефна Институту общего и политехнического образования Академии педагогических наук РСФСР и Центральному научно-исследовательскому институту комплексной автоматизации Министерства приборостроения, средств автоматизации и систем управления. Задачей первого шефа является создание учебного плана, программ, учебных материалов по профилирующим физико-математическим дисциплинам, постановка и проведение экспериментального преподавания; второй шеф осуществляет индивидуальное обучение учащихся вычислительной математике и программированию, используя математические машины вычислительного центра ЦНИИКА при школе.

Число математических классов школы в параллелях росло. В I959 году был один девятый класс , в I960 - также один , в I96I- три, а с I962 года школа ежегодно набирает пять математических девятых класса. С I965 года все IX-XI классы в школе специализируются по математике. Окончило школу по математической специализации в I962 году - 28 выпускников, в I963-34 , I964 - I03, I965 - I58, всего 323 человека. Из них в настоящее время обучаются : на дневных отделениях механико-математического факультета МГУ - 86 бывших учащихся школы, МФТИ - 29, МИФИ - 20, физфаке МГУ - I8, МЭИ - 27 ,МВТУ - 2I, МИЭМ - I7, отделение экономической кибернетики экономического факультета МГУ - 8. Другие выпускники обучаются в разных технических вузах (в том числе и на математических и физических факультетах университетов других городов).Сразу

после окончания школы 91 выпускник поступил на работу в вычислительные центры в качестве вычислителей-программистов. Из них в настоящее время продолжают работу 52 человека, 39 впоследствии перевелись на дневные отделения вузов, оставив работу. Из 52 работающих не совмещают работу с обучением в вечернем вузе лишь три человека. Среди работающих 11 студентов вечернего отделения мехмата МГУ, 14 студентов вечернего отделения МЭИ. Несовпадение общих сведений о выпускниках школы с общим числом выпускников объясняется переходом через некоторое время отдельных товарищей из одной категории в другую (например, работал и учился, а затем стал только учиться в дневном вузе).

За шесть лет работы математических классов школы, в математической олимпиаде при МГУ учащиеся были отмечены 258 раз, награждены премиями 41 раз (некоторые повторно). Пять питомцев школы И.Бернштейн (1962г.), Л.Гончарова(1962г), В.Фишман (1963 г.), А.Виленкин (1964), А.Зубков (1965г.) были участниками советской команды школьников в международных олимиадах по математике и стали их победителями. Многие учащиеся школы получали премии в физико-математических олимпиадах МФТИ и других вузов.

УЧЕБНЫЙ ПЛАН И ПРОГРАММЫ. XI-е классы кончают в 1966 г. школу, обучаясь по учебному плану, предусматривающему деление математических дисциплин на два потока: общематематические и специальные. Все общематематические предметы(ал - гебра, геометрия, математический анализ) объединяются в один предмет - общий курс математики, специальные (вычислительная математика, программирование и практика работы на электронных вычислительных и клавишных вычислительных машинах)- в специальный курс. В одиннадцатилетней школе учащиеся получали на изучение физики почти в два раза больше времени, чем в обычной одиннадцатилетке.

Учебный план десятилетнего обучения также предусматривает деление изучаемого материала по математическим вопросам

на общий курс математики и специальный математический предмет. Изменившиеся условия работы в десятилетней школе потребовали большого сокращения времени на изучение вычислительной математики и программирования. В IX классе на общий курс математики отводится по 8 часов в неделю . В X классе - в первом полугодии 8 , во втором - IO часов. Июнь месяц ученики IX класса полностью тратят на изучение теории и практики работы на вычислительных машинах.

Программы математических предметов. Алгебра: линейная и квадратичная функции, неравенства, степень с рациональным показателем, комплексные числа, многочлены, уравнения высших степеней, цепные дроби, комбинаторика и элементы теории вероятностей. Геометрия: векторы, геометрические преобразования, метод координат на плоскости, параллельность и перпендикулярность в пространстве, решение треугольников, многогранники, тела вращения. Математический анализ: действительные числа, числовые последовательности и их пределы, тригонометрические функции, показательная и логарифмическая функции, общее понятие о функции, предел функции и непрерывность функции, производная и ее приложение, неопределенный интеграл, определенный интеграл, ряды, формула Эйлера, простейшие дифференциальные уравнения. Вычислительная математика и программирование: Основы программирования (в том числе необходимые для программирования элементы математической логики), погрешности арифметических действий, вычисления по готовой формуле, численное решение алгебраических и трансцендентных уравнений, системы линейных уравнений, интерполяция, численное интегрирование, вычисление элементарных функций.

Кроме твердого учебного плана, учащиеся школы, по желанию , посещают внеклассные занятия по математике и физике.

В конце девятого класса (в одиннадцатилетней школе в конце девятого и десятого классов) учащиеся сдают зачет с оценкой. В программу зачета входят узловые вопросы общего

курса математики и специального курса математики.

В условиях десятилетней школы учащиеся не приобретают специальности вычислителя-программиста, как это было в условиях одиннадцатилетней школы, однако, они знакомятся с основами программирования на электронных вычислительных машинах и по окончании школы по желанию смогут поступить на работу в вычислительные центры, где за 2-3 месяца усвоят профессию.

Потерпев неудачу на вступительных экзаменах , многие выпускники школы предпочитают поступить на работу и учиться на вечернем отделении вуза интересующего их профиля, а не идти учиться в другие институты.

В условиях одиннадцатилетней школы учащиеся уделяли много внимания решению задач на электронных машинах. Сперва подготавливалась учебная задача, а затем одиннадцатиклассники , каждый самостоятельно или в группе со своими одноклассниками, участвовал в решении зачетной задачи, ранее никем не решенной . Уровень выполняемых учащимися решений достаточно высок. Сюда относятся: I/ Инженерные задачи, сводящиеся к суммированию различных числовых полей (например, при расчете устойчивости откосов земляных плотин) или моделированию работы технических устройств (например, автоматов); 2) Разработка стандартных программ для численного интегрирования, нахождения действительных и мнимых корней алгебраического уравнения методом Лина, получения буквенно-цифровой печати на разных ЭЦВМ, высоко-скоростного метода сортировки информации, отладки программ; 3) Автоматизация программирования; 4) Вычислительные задачи. Решение интегро-дифференциальных уравнений математической физики, уравнений Лапласа, систем дифференциальных уравнений I-го и 2-го порядка методом Рунге-Кутта; 5) Математические методы решения экономических задач; 6) Решение задач теоретического характера, например, составление таблиц исследуемых функций и рассмотрение структур различных числовых полей. Ряд задач выполнялся для Института проблем передачи информации АН СССР, Математического

института АН СССР, Института Физики Земли АН СССР и других. Несколько отчетов о работе учащихся опубликованы в научных журналах. Естественно, что в условиях десятилетки, учащиеся не будут заняты решением зачетных задач, требующих много времени и больших усилий. Все специальное обучение будет способствовать лишь повышению общеобразовательного уровня и ознакомлению с методами решения задач на вычислительных машинах.

Как в XI-летней, так и в X-летней школе, выпускники должны отлично владеть элементарной математикой, хорошо знать физику. Это - непременное условие обучения в школе. Для сильных учащихся школы в разное время читались факультативные курсы: " Элементы теории функций действительной переменной", "Теория меры и интеграл Лебега", "Математические методы решения экономических задач", "Физико-математические основы генетики" и другие.

Обучение математическим дисциплинам построено так: I) Общий курс математики ведет один школьный учитель, 2) Специальные вопросы изучаются индивидуально, небольшими группами, а иной раз и по одному человеку. Руководство таким обучением или обучение проводят научные сотрудники вычислительного центра ЦНИИКА.

Преподавателями математики школы являются кроме штатных школьных преподавателей В.Д.Головиной (директора школы), И.В.Левиной, Нечаевой Т.Ф., Черняка Я.С., Новиковой К.В., Лебедевой А.С., Чеснокова А.С., Шарошиной И.И., научные сотрудники и преподаватели высших учебных заведений канд.пед.наук В.Г.Ашкинузе, канд.пед.наук А.И.Фетисов, канд.пед.наук, засл.учитель школы РСФСР С.И.Шварцбурд, канд.пед.наук В.М.Монахов, канд.пед.наук К.И.Нешков , асп.Н.А.Балакин, канд.физ.мат.наук П.Т.Резниковский, канд.техн.наук Ф.А.Вульман, научные сотрудники С.Ф.Вильмут, А.Я.Подрабинович, И.П.Корнфельд, С.М.Резник, В.В.Рыков, З.И.Будник, А.А.Кириллов, М.Б.Казаров, Е.И.Букшпан,

В.Н.Романов, М.А.Леонтьева, Н.М.Войцехович, А.Н.Хорькова. Руководит работой научных сотрудников ЦНИИКА начальник вычислительного отдела М.П.Симою и начальник лаборатории программирования П.Т.Резниковский .

Преподавание физики ведут Э.Г.Брагинская, М.Д.Гельфанд, Г.Н.Харасъкин, В.В. Максимов канд.пед.наук Н.М.Шахмаев и научный сотрудник Н.С.Постников. Внеклассную работу по математике проводят: I) Группа студентов Московского института электронного машиностроения под руководством доцента А.М.Олевского в составе Драбкина В., Козлова М., Соскина Л., Брегера А., Трунина Ю., Школьникова В., Кайнина В., Лебедева А., Гуревича Г., Заславского В., Русакова С., Ссорина В., Руфинского О., Колесникова Г. 2) Аспирант МГУ С.Я. Герценштейн и группа студентов механико-математического факультета МГУ Е.Анпо, Г.Кричевец, Н.Ерастова , А.Виленкин, А.Шнирельман, В.Котеликов, А.Кочергин, Л.Бунимович, В.Саватеев, А.Немировский, М.Брин, М.Гуревич, Е.Горелик, А.Алдаков, Я.Штипельман, А.Дуркин, В.Филиппов, И.Бобылев, В.Варфоломеев. 3) Группа аспирантов МФТИ: И.Вольфсон, Ю.Брук, Е.Иванов, А.Смирнов ведут внеклассную работу по физике.

В школе №444 ведется большая экспериментальная работа по изменению содержания обучения математике, начиная с I-го класса. В настоящее время экспериментальная программа охватывает все классы школы, начиная с первого по шестой включительно. С учащимися 7-х и 8-х классов ведется внеклассная работа по математике и физике силами студентов механико-математического ф-та МГУ и группой старшеклассников школы. Внеклассная работа по математике проводится во всех классах, начиная с 4-го.